ベーシックレベル数学Ⅰを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ ベーシックレベル数学Ⅰの講座へ。この講座は

「数学Ⅰを，用語の意味や公式のなりたちについて理解するところから学習したい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅰでは，高校数学の礎(いしずえ)とも言える内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学の学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，1つ1つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ねていきます。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ⅰと本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を1回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　数と式

第１講　式の計算と展開
PART1　単項式と多項式
PART2　整式の整理
PART3　整式の加法と減法，乗法
PART4　展開

第２講　因数分解
PART1　共通因数
PART2　因数分解の公式
PART3　たすきがけによる因数分解
PART4　いろいろな因数分解

第３講　実数
PART1　実数
PART2　絶対値
PART3　根号を含む式の計算

第４講　１次不等式
PART1　１次不等式とその解き方
PART2　いろいろな１次不等式
PART3　絶対値を含む方程式・不等式

第５講　集合，命題と条件
PART1　集合と要素，部分集合
PART2　共通部分と和集合，全体集合と補集合
PART3　命題と条件
PART4　必要条件と十分条件，条件の否定

第６講　命題と論証
PART1　逆・裏・対偶
PART2　命題と証明

第２章　２次関数

第７講　２次関数とグラフ
PART1　関数とその表し方
PART2　１次関数のグラフと最大値，最小値
PART3　$y=ax^2+q$ のグラフ，$y=a(x-p)^2$ のグラフ
PART4　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ
PART5　平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ
PART6　放物線の平行移動

第８講　２次関数の最大・最小，２次関数の決定
PART1　２次関数の最大・最小
PART2　定義域が限られた２次関数の最大・最小
PART3　２次関数の決定

第９講　２次方程式
PART1　２次方程式の解法
PART2　２次方程式の実数解の個数
PART3　２次関数のグラフと x 軸の共有点の座標
PART4　２次関数のグラフと x 軸の位置関係

第 10 講　２次不等式
PART1　２次不等式と２次関数のグラフ
PART2　２次不等式（グラフが接するとき）
PART3　２次不等式（グラフが共有点をもたないとき）
PART4　２次不等式の利用

第３章　図形と計量

第 11 講　鋭角の三角比
PART1　直角三角形と三角比
PART2　有名角の三角比，三角比の表
PART3　三角比の利用
PART4　三角比の相互関係
PART5　$90^\circ-\theta$ の三角比

第 12 講　三角比の拡張
PART1　座標を用いた三角比の定義
PART2　単位円を用いた三角比の定義
PART3　三角比の値と角
PART4　$180^\circ-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

第 13 講　正弦定理・余弦定理
PART1　正弦定理
PART2　余弦定理
PART3　余弦定理の利用
PART4　三角形の決定

第 14 講　図形の計量
PART1　三角形の面積
PART2　三角形の内接円と面積
PART3　四角形の面積
PART4　空間図形への応用

第４章　データの分析

第 15 講　データの分析
PART1　データの整理と代表値
PART2　データの散らばり
PART3　分散と標準偏差
PART4　データの相関
PART5　外れ値
PART6　仮説検定

講座の受講の仕方

ここでは,効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い,実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとにいくつかのPART（パート）に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「要点」

⇒　そのPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ち

「講義問題」（1，2など）

⇒　「要点」で学んだことを確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「要点」で学んだことをベースに，知識を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「要点」「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれるPARTの一部または全部が未習，または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても，まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら,テキストと筆記用具を手元におき,動画を再生してください。そして,真剣に受講して,講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，複数のチャプターに分かれています。

（例）　第１講　式の計算と展開

PART1　単項式と多項式　…　【要点整理①】・【要点整理②】・【要点整理③】・【問題解説】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【要点整理】のチャプターで，「要点」の内容を解説します。このPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。

必要なことは予めテキストに記載してあります。その上で，一部「穴埋め」や「記述」が必要な部分があります。講師の話に全力で耳を傾け，テキストを完成させましょう。

(2)　【問題解説】のチャプターで，1，2，3，4といった「講義問題」を解説します。

まずは，「Point Pickup」にて，「要点」を通じて習得したことを整理します。【要点整理】と同様，一部「穴埋め」や「記述」となっています。

次に，「Point Pickup」で整理した知識や考え方を元に，実際に問題を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

さらに，解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「要点」→「Point Pickup」→「講義問題」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分の受講時間となります。

各講に含まれるすべての PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は, PART 単位の受講でも構いません。また, 週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」

・「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」

・「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが, 安心してください。この講座は, いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして, 講座の受講を進めていくうちに, 感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずは【問題解説】の動画を，それでも思い出せない場合は【要点整理】の動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその講の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに**「確認問題」**を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ⅰの世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各PART，およそ15分～30分。それを，どこの曜日のどの時間帯に何PART(何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅰと本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「ベーシックレベル数学Ⅰ」は，あくまで数学Ⅰの「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高1・高2 スタンダードレベル数学Ⅰ」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ⅰの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

第 1 講　式の計算と展開

PART1　単項式と多項式

要点 ①　単項式

「単項式」… 2，x，$4a^2b$ のように，数，文字，および数や文字を掛け合わせて作られる式

「係数」… 単項式の　　の部分

例　$3x^4$ の係数は

「次数」… 単項式の中で，掛け合わせた文字の

例　$-4x^2y^3=-4\times x\times x\times y\times y\times y$ より，$-4x^2y^3$ の次数は

2 など，数だけの単項式の次数は 0 である。

ただし，数 0 の次数は考えない(0 だけの項は，通常は書かないため)。

要点 ②　ある文字に着目する

ある単項式が 2 種類以上の文字を含むとき，特定の文字に　　　して係数や次数を考えることがある。特定の文字に着目した場合，他の文字は　　(定数)として扱う。

例　$-ax^2y$ の係数は　　，次数は

a に着目すると　　　　　　より，係数は　　　　，次数は

x と y に着目すると　　　　　　より，係数は　　，次数は

要点 ③　多項式

「多項式」… いくつかの単項式の　　で表される式

その 1 つ 1 つの単項式を「　　」といい，数字だけの項を「　　　　　」という。

例　$2x^2-3x+4=2x^2\quad -3x\quad +4$ より

この式の項は　　　　　　　　，定数項は

多項式の各項の中で，次数が最も高い項の次数を，その多項式の次数といい，次数が n である多項式を「　　　　　」という。

例　$-3x^2+4x-5$ は　次式である。

単項式と多項式を合わせて「　　　」という。

また，単項式を「項が 1 つの多項式」と考えると，多項式は整式と同じ，と考えられる。

1 (1) 次の単項式で，[　] 内の文字に着目したときの，係数と次数をいえ。

$-3ax^2y^3$　　[a]，[x]

(2) 次の多項式で，[　] 内の文字に着目したとき，何次式であるかをいえ。また，それぞれの文字に着目したときの定数項をいえ。

$3x^2+x-2y^3+4$　　[x]，[y]

Point Pickup

単項式の係数と次数

ある文字に着目するときは，他の文字は「　　」として扱う

多項式の次数と定数項

多項式の次数は，各項の中で，次数が最も高い項の次数である。
また，多項式の定数項は，「(着目した)文字を含まない項」である。

第 1 講　PART1 確認問題

1 単項式 $-4x^3y^2$ について，x に着目したとき，この単項式の係数は [ア] で，次数は [イ] である。

[ア] は，次の①～④のうちから選べ。

① -4　② $-4x^3$
③ $4y^2$　④ $-4y^2$

2 単項式 $-4x^3y^2$ について，y に着目したとき，この単項式の係数は [ウ] で，次数は [エ] である。

[ウ] は，次の①～④のうちから選べ。

① -4　② $4x^3$
③ $-4x^3$　④ $-4y^3$

3 多項式 $4x^2+x-5y^3-2$ について，x に着目したとき，この多項式は [オ] 次式であり，定数項は [カ] である。

[カ] は，次の①～④のうちから選べ。

① -2　② x
③ $-5y^3$　④ $-5y^3-2$

4 多項式 $4x^2+x-5y^3-2$ について，y に着目したとき，この多項式は [キ] 次式であり，定数項は [ク] である。

[ク] は，次の①～④のうちから選べ。

① -2　② $x-2$

③ $4x^2+x-2$　④ $-5y^3-2$

【MEMO】

PART2 整式の整理

要点 ① 同類項と整式の整理

「同類項」… $2x^2y$ と $-3x^2y$ のように，文字の部分が同じ項

同類項は，係数の和を計算し，1 つにまとめることができる。

例　$2x^2y-3x^2y=$

1 つの整式の中で，同類項をまとめることを，整式を　　　　するという。

「　　　　　　　　」に整理 … 整式を整理するときに，次数の高い項から順に並べること

例　$2x-4-x^2+x^3$ を降べきの順に整理すると

※整式を整理するときに，次数の低い項から順に並べることを，「昇べきの順」に整理するという。

[MEMO]

2 (1) 次の整式を整理せよ。

$$x^2+3-x^3+5x-3x^2-2x^3+2$$

(2) 次の整式を，[　] 内の文字に着目して整理せよ。

$$2x^2+4xy-5x+3y+7 \qquad [x],\ [y]$$

Point Pickup

整式の整理

整式の整理は　①同類項をまとめる　　②降べきの順に並べる

ある文字に着目して整理

着目していない文字を「　　」として扱うことに注意。

第 1 講　PART2 確認問題

1　次の整式を整理せよ。

$$5a^3-4+a^2-7a^2+5a+9$$
$$=\boxed{\text{ア}}a^3-\boxed{\text{イ}}a^2+5a+\boxed{\text{ウ}}$$

2　整式 $x^3+3xy+4y^2-2x+7y-8$ を x について降べきの順に整理した式は $\boxed{\text{エ}}$ である。

[$\boxed{\text{エ}}$ の選択肢]

① $x^3+4y^2+3xy-2x+7y-8$

② $x^3+(3y-2)x+4y^2+7y-8$

③ $x^3-2x+4y^2+(3x+7)y-8$

④ $(4y^2+7y-8)+(3y-2)x+x^3$

3　整式 $x^3+3xy+4y^2-2x+7y-8$ を y について降べきの順に整理した式は $\boxed{\text{オ}}$ である。

[$\boxed{\text{オ}}$ の選択肢]

① $x^3+4y^2+3xy-2x+7y-8$

② $4y^2+7y+x^3+(3y-2)x-8$

③ $4y^2+(3x+7)y+x^3-2x-8$

④ $(x^3-2x-8)+(3x+7)y+4y^2$

PART3　整式の加法と減法，乗法

要点 ①　整式の加法と減法

「和」… 加法(足し算)の結果

「差」… 減法(引き算)の結果

整式の和と差は，同類項をまとめることで計算することができる。

例　$(3x^2-4x-5)+(-x^2-2x+3)$

$=(\quad)x^2+(\quad)x+(\quad)$

$=$

$(2a^2+ab-4b^2)-(-3a^2+ab-5b^2)$

$=2a^2+ab-4b^2$

$=(\quad)a^2+(\quad)ab+(\quad)b^2$

$=$

要点 ②　累乗と指数法則

a をいくつか掛けたものを，a の「　　　」という。

a を n 個掛けたものを，a の「　　　」といい，　　と表す。

このときの n を「　　　」という。

$\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{個}}=a^n$　　$a^1=\quad$，$a^2=\quad$，$a^3=$

一般に，次の指数法則が成り立つ。

指数法則

m，n が正の整数のとき

1　$a^m\times a^n=a^{m+n}$　　**2**　$(a^m)^n=a^{m\times n}$　　**3**　$(ab)^n=a^n b^n$

例　$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a\quad=$

$(a^2)^3=\quad\times\quad\times\quad=a^{2+2+2}=a\quad=$

$(ab)^2=ab\times ab=(a\times a)\times(b\times b)=$

要点 ③ 整式の乗法

「積」… 乗法(掛け算)の結果

整式の積は，分配法則

$$A(B+C)=AB+AC \qquad (A+B)C=AC+BC$$

を用いて計算することができる。

例 $2(3x+4)=\qquad\qquad =$

$(3x-5)\times(-7)=\qquad\qquad\qquad =$

※記号「・」は，記号「×」と同じく「積」を表す。

3 (1)　$A=x^2+x+3$，$B=2x^2-x-5$ のとき，$A+B$，$A-B$，$2A-3B$ を計算せよ。

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$2a^2\times(-3a^3)^2$　　(ii)　$(-2x^2y^4)^3\times5x^2y$

(3)　次の計算をせよ。

(i)　$2x(x^2-3x)$　　(ii)　$(x^2-3xy-2y)\times(-xy)$

Point Pickup

整式の加法と減法

同類項をまとめる。$A-B$ は，B の各項の係数の符号をすべて変えて計算する。

(単項式)×(単項式)

(単項式)×(単項式)の計算は　①係数　②文字　の順に，積をそれぞれ計算する。

(単項式)×(多項式)

(単項式)×(多項式)，(多項式)×(単項式)の計算は，「分配法則」を用いて計算する。

第 1 講　PART3 確認問題

1 $A=3x^2+4x-1$，$B=x^2-2x-5$ のとき，

$A+B=4x^2+$ ア $x-$ イ

2 $A=3x^2+4x-1$，$B=x^2-2x-5$ のとき，

$A-B=$ ウ x^2+ エ $x+$ オ

3 $A=3x^2+4x-1$，$B=x^2-2x-5$ のとき，

$3A-2B=$ カ x^2+ キク $x+$ ケ

4 $(-2x^2)^3\times x^4=$ コサ $x^{\text{シス}}$

5 $3xy^3\times(-4x^2y)^2=$ セソ $x^{\text{タ}}y^{\text{チ}}$

6 $2x(3x^2+4x)=$ ツ x^3+ テ x^2

7 $(a^2+2ab-3b)\times3ab$

$=3a^3b+$ ト a^2b^2- ナ ab^2

PART4 展開

要点① 展開

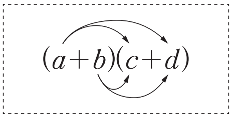
「展開」… 整式の積を，単項式の和の形に表すこと

$(a+b)(c+d)=$

$=$

$=$

$=$



例 $(2x^2-x-4)(x+3)$

$=2x^2(x+3)-x(x+3)-4(x+3)$

$=$

$=$

要点② 展開の公式

展開する式がある特別な形をしているとき，以下の「展開の公式」により，その展開の途中計算を省略することができる。

展開の公式

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

4 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例 $(x+3)^2=$ 　　　　$=$

$(x-4)^2=$ 　　　　$=$

$(x+5)(x-5)=$ 　　　$=$

$(x+2)(x-3)=$ 　　　　　　$=$

$(ax+b)(cx+d)$ を展開し，x に着目して整理すると

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+adx+bcx+bd=$$

であることから，次の展開の公式が成り立つ。

展開の公式

5　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

例　$(2x+3)(4x-5)=$

$=$

要点 ③ 式の展開の工夫

展開する式の一部を，別の文字でおき換えることで，展開の公式を利用できる場合がある。

例　$(x+y+4)(x+y-4)$ を展開する。

$=A$ とおくと

$$\begin{aligned}(x+y+4)(x+y-4)&=(A+4)(A-4)\\&=A^2-16\\&=\qquad -16\\&=\end{aligned}$$

実際に別の文字でおき換えずに，ひとつのかたまりとみて展開することも可能である。

例　$(x+y+4)(x+y-4)=\{(x+y)+4\}\{(x+y)-4\}$

$$\begin{aligned}&=(x+y)^2-16\\&=x^2+2xy+y^2-16\end{aligned}$$

4 (1) 次の式を展開せよ。

(i) $(2x+1)^2$　　(ii) $(3x-2y)^2$

(iii) $(3x+5y)(3x-5y)$　　(iv) $(x-4y)(x-6y)$

(2) 次の式を展開せよ。

(i) $(2x+3)(3x+4)$　　(ii) $(x+5y)(3x-7y)$

(3) 次の式を展開せよ。

(i) $(x-y-8)(x-y+2)$　　(ii) $(a+b+c)^2$

Point Pickup

展開の公式

展開の公式

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　**2** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　**4** $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

5 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

が利用できるときは，積極的に利用するとよい。

展開の工夫

式の一部を別の文字で「　　　　　　　　」ことで，展開の公式を使える形にする。

第 1 講　PART4 確認問題

次の式を展開せよ。

1 $(x+3)^2=x^2+$ ア $x+$ イ

2 $(2x-1)^2=$ ウ x^2- エ $x+1$

3 $(x+4y)(x-4y)=x^2-$ オカ y^2

4 $(x-2a)(x-3a)=x^2-$ キ $ax+$ ク a^2

5 $(2x-3)(x+4)=2x^2+$ ケ $x-$ コサ

6 $(x+2y)(3x+4y)$

$=$ シ x^2+ スセ $xy+$ ソ y^2

7 $(x+y-2)(x+y+5)$

$=x^2+$ タ $xy+y^2+$ チ $x+$ ツ $y-$ テト

8 $(a+2b-3)^2$

$=a^2+$ ナ $ab+$ ニ b^2- ヌ $a-$ ネノ $b+$ ハ

第 2 講　因数分解

PART1　共通因数

要点 ①　因数分解

ある整式を，1 次以上の整式の「　　　　　」で表すことを，その整式を「　　　　　　」するという。因数分解された式において，積を作っているそれぞれの式を，もとの式の「　　　」という。

例　x^2-x-20 を因数分解すると

$$x^2-x-20=(x+4)(x-5)$$

である。よって，　　，　　は x^2-x-20 の因数である。

※因数分解は，展開の逆の操作である。
展開は分配法則で必ずできるが，
因数分解はいつでもできるとは限らない。

$(x+4)(x-5)$
展開 ↓　　　↑ 因数分解
x^2-x-20

要点 ②　共通因数でくくる

整式において，各項に共通な因数があるとき，その因数を「　　　　　　」という。

例　$2x^2-6x=2x\cdot x-2x\cdot 3$

よって，　　が共通因数

整式の因数分解において，すべての項に共通な因数があれば，分配法則を用いて，その共通因数をかっこの外に「　　　　　　　」ことで，整式を因数分解することができる。

例　$2x^2y-6xy^2$

$A(B+C)=AB+AC$
⇕
$AB+AC=A(B+C)$

※因数分解においては，共通因数があればそれをすべてくくり出す必要がある。
$3ax^2+6axy=3a(x^2+2xy)$ は，式変形としては間違っていないが，因数分解としては不十分である。

多項式を 1 つのかたまりと見なし，共通因数としてくくり出すことができる場合がある。

例　$(a+b)x+(a+b)y$ を因数分解する。

$a+b=A$ とおくと

$$Ax+Ay=A(x+y)$$

と因数分解することができる。

よって，$a+b$ を 1 つのかたまりと見なし，共通因数としてくくり出すと

$$(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$$

1 (1) 次の式を因数分解せよ。

(i) $15x^3-5x^2y$　　(ii) $6a^2bc-9ab^2c+12abc^2$

(2) 次の式を因数分解せよ。

(i) $(a-4)x+(a-4)y$　　(ii) $(a-b)x^2+(b-a)y$

Point Pickup

因数分解の基本

すべての項の「　　　　　　」があれば，それでくくる。

共通因数が多項式

共通に現れる式を「　　　　　　　　　」と見なすことで，それを共通因数としてくくり出すことができる場合がある。おき換えも有効。

第 2 講　PART1 確認問題

次の式を因数分解せよ。

1 $6xy^2-9y^3=$ [ア] $y^2($ [イ] $x-$ [ウ] $y)$

2 $4a^2b+8ab^2-12ab$

$=$ [エ] $ab(a+$ [オ] $b-$ [カ] $)$

3 $(a+3)x+5(a+3)=(a+$ [キ] $)(x+$ [ク] $)$

4 $a(x-y)+2(y-x)=(x-y)(a-$ [ケ] $)$

PART2 因数分解の公式

要点 ① 因数分解の公式(1)

展開の公式

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　**2** $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

を逆にみると，以下の因数分解の公式が得られる。

因数分解の公式(1)

1 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$　**2** $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

3 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

例 $x^2+6x+9=$

$x^2-4x+4=$

$x^2-25=$

また，展開の公式

4 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

を逆にみると，以下の因数分解の公式が得られる。

因数分解の公式(1)

4 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例 $x^2-2x-15=$

この式においては，　が -2，　が -15 となる 2 数を見つけることで，因数分解できる。

[MEMO]

2 (1)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$x^2+12xy+36y^2$

(ii)　$9x^2-48xy+64y^2$

(iii)　$25x^2-49$

(iv)　$36x^2-4y^2$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　x^2+6x+5

(ii)　x^2+x-6

(iii)　$x^2-8xy+15y^2$

(iv)　$x^2-7xy-30y^2$

Point Pickup

公式による因数分解

因数分解の公式

1　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

2　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

3　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

を利用することで，因数分解を行うことができる。

共通因数でくくることができる場合は，まずは先にくくるとよい。

第 2 講　PART2 確認問題

次の式を因数分解せよ。

1 $x^2+6xy+9y^2=(x+\boxed{ア}y)^2$

2 $4x^2-20xy+25y^2=(\boxed{イ}x-\boxed{ウ}y)^2$

3 $9x^2-25=(\boxed{エ}x+\boxed{オ})(\boxed{カ}x-\boxed{キ})$

4 $a^2-49b^2=(a+\boxed{ク}b)(a-\boxed{ケ}b)$

5 $x^2+8x+7=(x+\boxed{コ})(x+\boxed{サ})$

(ただし，$\boxed{コ}<\boxed{サ}$ とする。)

6 $x^2-2x-15=(x+\boxed{シ})(x-\boxed{ス})$

7 $x^2-7xy+10y^2=(x-\boxed{セ}y)(x-\boxed{ソ}y)$

(ただし，$\boxed{セ}<\boxed{ソ}$ とする。)

8 $x^2+4xy-12y^2=(x+\boxed{タ}y)(x-\boxed{チ}y)$

PART3　たすきがけによる因数分解

要点 ①　因数分解の公式(2)

展開の公式

5　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

を逆にみると，以下の因数分解の公式が得られる。

因数分解の公式(2)

5　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

例　$3x^2+5x+2$ の因数分解

$ac=3$，$ad+bc=5$，$bd=2$ となる4数 a，b，c，d を見つける。手順は以下。

①　$ac=3$，すなわち積が3になる2数 a，c を考える。

②　$bd=2$，すなわち積が2になる2数 b，d を考える。

③　$ad+bc=5$ となれば，$3x^2+5x+2=(\quad x+\quad)(\quad x+\quad)$ と因数分解できる。

③を確かめる方法として「　　　　　　　　」と呼ばれる手法を使うことができる。

＜たすきがけ＞

a	b
c	d

①より $a=3$，$c=1$，②より $b=2$，$d=1$ とすると，

3	2
1	1

$ad+bc=5$ となる。

よって，$3x^2+5x+2=(\qquad)(\qquad)$

※①より $a=3$，$c=1$，②より $b=1$，$d=2$ とすると，

3　　1
1　　2

$ad+bc=7$ となり，不適。

例　$3x^2-5x-2$ の因数分解

$a=3$，$c=1$ としたとき，$bd=-2$ となる組み合わせとして，

$(b,\ d)=(2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (-1,\ 2),\ (1,\ -2)$

を考える。

3 ╲╱ 2 →
1 ╱╲ −1 →

$ad+bc=$　　となり，

3 ╲╱ →
1 ╱╲ →

$ad+bc=$　　となり，

3 ╲╱ →
1 ╱╲ →

$ad+bc=$　　となり，

3 ╲╱ →
1 ╱╲ →

$ad+bc=$　　となり，

よって，$3x^2-5x-2=(\qquad)(\qquad)$

3 次の式を因数分解せよ。

(1) $5x^2+7x+2$

(2) $4x^2-8x+3$

(3) $2x^2+x-6$

(4) $6x^2+5x-6$

(5) $12x^2-13xy-4y^2$

Point Pickup

たすきがけによる因数分解

因数分解の公式

5 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

を利用することで，因数分解を行うことができる。

x の 2 次式 Ax^2+Bx+C を，公式 **5** を用いて因数分解する手順は以下

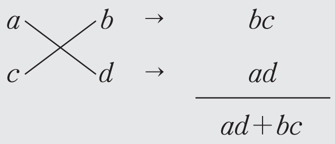
① $ac=A$（積が A）となる 2 数 a，c を考える。

② $bd=C$（積が C）となる 2 数 b，d を考える

③ ①，②で考えた a，b，c，d が，$ad+bc=B$ を満たすかを「　　　　　　　　」を用いて確認する。

④ ③が確認できたら，①，②を満たす a，b，c，d を用いて $Ax^2+Bx+C=(ax+b)(cx+d)$ と因数分解する。

＜たすきがけ＞



第 2 講 PART3 確認問題

次の式を因数分解せよ。

1 $2x^2+5x+3=(x+\boxed{\text{ア}})(\boxed{\text{イ}}\,x+\boxed{\text{ウ}})$

2 $3x^2-x-4=(x+\boxed{\text{エ}})(\boxed{\text{オ}}\,x-\boxed{\text{カ}})$

3 $5x^2+7x-6=(x+\boxed{\text{キ}})(\boxed{\text{ク}}\,x-\boxed{\text{ケ}})$

4 $6x^2-11x-10$

$=(\boxed{\text{コ}}\,x-\boxed{\text{サ}})(\boxed{\text{シ}}\,x+\boxed{\text{ス}})$

5 $8x^2+6xy-5y^2=(\boxed{\text{セ}}\,x-y)(\boxed{\text{ソ}}\,x+\boxed{\text{タ}}\,y)$

PART4 いろいろな因数分解

要点 ① おき換えによる因数分解

式の一部を 1 つのかたまりと見なし，おき換えを行うことで，因数分解の公式が利用できる場合がある。

例 $(x+y)^2+4(x+y)+3$ の因数分解

$x+y=X$ とおくと

$(x+y)^2+4(x+y)+3=$

x^4+2x^2-3 の因数分解

$x^4+2x^2-3=\qquad +2x^2-3$ より，$x^2=X$ とおくと

$x^4+2x^2-3=$

要点 ② 1 文字整理

複数の文字を含む式の因数分解は，1 つの文字に　　　して整理する。

例 $xy+x+y+1$ の因数分解

x に着目して因数分解すると

$xy+x+y+1=$

y に着目して因数分解すると

$xy+x+y+1=$

着目する文字によって次数が異なる場合は，最も次数が「　　　」文字に着目するとよい。

例 $x^2+xy+3x+y+2$ の因数分解

x に着目すると

…… 次式

y に着目すると

…… 次式

よって，　に着目して因数分解すると

$$x^2+xy+3x+y+2$$
$$=(x+1)y+x^2+3x+2$$
$$=(x+1)y$$

4　(1)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$(x-y)^2-4(x-y)-12$　　(ii)　x^4+3x^2-28

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$ab-a+2b-2$　　(ii)　$x^2+xy+x+2y-2$

Point Pickup

おき換えによる因数分解

式の一部を 1 つのかたまりと見なし，ある文字でおき換えることで

①「　　　　　　　」としてくくり出す

②「　　　」を利用する

ことにより，因数分解ができる場合がある。

ax^4+bx^2+c の形の式(複 2 次式)は，$x^4=$　　　であることから，　　$=X$ とおき換えることで，X の 2 次式となる。

1 文字整理

2 つ以上の文字を含む式で，すぐに公式を利用できない式の場合は，1 つの文字に「　　　」して整理し，因数分解を試みる。

着目する文字によって次数が異なる場合は，最も次数が「　　　」文字に着目するとよい。

第 2 講　PART4 確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$(x+y)^2+3(x+y)-10$

$=\left(x+y-\boxed{\text{ア}}\right)\left(x+y+\boxed{\text{イ}}\right)$

2　$x^4-4x^2-45=\left(x^2+\boxed{\text{ウ}}\right)\left(x+\boxed{\text{エ}}\right)\left(x-\boxed{\text{オ}}\right)$

3　$ab+3a+2b+6=\left(a+\boxed{\text{カ}}\right)\left(b+\boxed{\text{キ}}\right)$

4　$x^2+xy+x+3y-6=\left(x+\boxed{\text{ク}}\right)\left(x+y-\boxed{\text{ケ}}\right)$

第3講 実数

PART1 実数

要点① 有理数

整数 { の整数(自然数)　1, 2, 3, ……
　　　の整数　-1, -2, -3, ……

「　　　」… 2つの整数 m, n を用いて分数　の形で表される数(ただし $n \neq 0$)

例　有理数の例　$\frac{3}{4}$,　2　,　$-\frac{1}{3}$　,　0.4

※それ以上約分できない分数を「　　　」という。

「　　　」… 小数第何位かまでで表される小数　$\frac{3}{4}=0.75$

「　　　」… 小数部分が無限に続く小数

$\frac{1}{3}=0.333\cdots\cdots$,　$\frac{4}{37}=0.108108\cdots\cdots$,　$\pi=3.1415\cdots\cdots$

無限小数のうち，ある位以下から同じ数字の並びが繰り返される小数を「　　　」という。循環小数は，循環する部分を次のように書き表すことができる。

$0.333\cdots\cdots=0.\dot{3}$,　$0.108108\cdots\cdots=0.\dot{1}0\dot{8}$

一般に次のことが知られている。

> 有理数は，整数，有限小数，循環小数のいずれかである。
> 逆に，整数，有限小数，循環小数は必ず分数で表され，有理数である。

例　循環小数 $0.\dot{5}1\dot{8}$ を分数で表す。

$x=0.\dot{5}1\dot{8}$ とおく。循環している部分が　桁なので，

$10\ \ x=\ \ \ x$ を考え，x との差をとると

$=$

$x=\ \ 0.518518\cdots\cdots$

$999x=518$　　$x=\frac{518}{999}=\frac{14}{27}$

要点② 実数と無理数

「　　　」… 整数，および有限小数または無限小数で表される数

有理数は，整数，有限小数，循環小数(循環する無限小数)のいずれかである。

「　　　　」… 実数のうち，有理数でないもの，すなわち分数で表すことができない数

無理数は，循環しない無限小数である。

例 無理数の例　$\pi = 3.141592\cdots\cdots$，　　　$= 1.41421356\cdots\cdots$

- 実数
  - 有理数
    - 整数(自然数，0，負の整数)
    - 有限小数
    - 循環小数（無限小数）
  - 無理数(循環しない無限小数)（無限小数）

2つの自然数 a，b について

和 $a+b$，積 ab は自然数であるが，差 $a-b$，商 $\dfrac{a}{b}$ は自然数になるとは限らない。

2つの整数 a，b について

和 $a+b$，差 $a-b$，積 ab は整数であるが，商 $\dfrac{a}{b}$ は整数になるとは限らない。

2つの有理数 a，b について

和 $a+b$，差 $a-b$，積 ab，商 $\dfrac{a}{b}$ (ただし $b \neq 0$)は常に有理数である。

2つの実数 a，b について

和 $a+b$，差 $a-b$，積 ab，商 $\dfrac{a}{b}$ (ただし $b \neq 0$)は常に実数である。

※商において，0で割ることは考えない。

1 (1) 次の分数を循環小数の表し方で書け。

(i) $\dfrac{2}{3}$　　(ii) $-\dfrac{7}{33}$

(2) 次の循環小数を分数で表せ。

(i) $0.\dot{2}$　　(ii) $0.\dot{3}4\dot{2}$

Point Pickup

分数を循環小数で表す

(分子)÷(分母)を実際に計算し，循環する部分の最初と最後の数字の上に・をつけて表す。

循環小数を分数で表す

① 循環小数を x とおく。

② 循環している部分が□桁 $\Longrightarrow$ $10^{\square}x$ を考える。

③ $10^{\square}x-x$ を計算し，x を求める。

第 3 講　PART1 確認問題

1 $\dfrac{5}{6}$ を循環小数で表すと，$\boxed{\text{ア}}$ となる。

$\boxed{\text{ア}}$ は，次の①～④のうちから選べ。

① $0.\dot{8}$　　② $0.8\dot{3}$

③ $0.\dot{8}\dot{3}$　　④ $0.\dot{8}3\dot{3}$

2 $\dfrac{4}{11}$ を循環小数で表すと，$\boxed{\text{イ}}$ となる。

$\boxed{\text{イ}}$ は，次の①～④のうちから選べ。

① $0.\dot{3}$　　② $0.3\dot{6}$

③ $0.\dot{3}\dot{6}$　　④ $0.\dot{3}6\dot{6}$

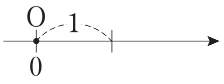
3 循環小数 $0.\dot{5}$ を分数で表すと，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

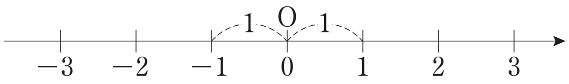
4 循環小数 $0.\dot{1}3\dot{5}$ を分数で表すと，$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

PART2 絶対値

要点① 絶対値

直線上に基準となる点 O をとり，実数 0 を対応させる。また，単位の長さ 1 と正の向きを定めると，実数はすべてこの直線上の点として表される。直線上の点と実数を 1：1 に対応させるとき，この直線を数直線といい，O を原点という。





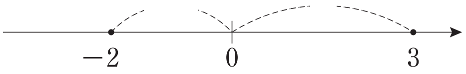
数直線上で，点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，座標が a である点 P を

　　と表す。

原点 O から点 P(a) までの「　　　　」を，実数 a の「 絶対値 」といい，　　で表す。

例　3 の絶対値は

　−2 の絶対値は



0 の絶対値は 0 である。つまり，$|0|=0$ である。

実数 a の絶対値について，次のことが成り立つ。

> **絶対値の性質**
>
> **1**　$|a| \geqq 0$
>
> **2**　$a \geqq 0$ のとき　$|a|=a$　　　　$a<0$ のとき　$|a|=-a$

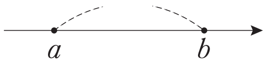
数直線上の 2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は

　$a \leqq b$ のとき　AB＝

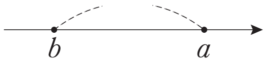
　$a>b$ のとき　AB＝

である。よって AB＝　　　　と表すことができる。

$a \leqq b$ のとき



$a>b$ のとき



例　2 点 A(6)，B(2) 間の距離は　AB＝

【MEMO】

2 (1) 次の値を求めよ。

(i) $|4|$　　(ii) $|-3|$　　(iii) $|\sqrt{2}-2|$

(2) 数直線上において，次の2点間の距離を求めよ。

(i) A(3)，B(5)　　(ii) A(−2)，B(4)　　(iii) A(−1)，B(−6)

Point Pickup

絶対値

$a \geqq 0$ のとき　$|a|=a$　　　$a<0$ のとき　$|a|=-a$

2点間の距離

数直線上の2点 A(a)，B(b) 間の距離は　$\mathrm{AB}=|b-a|$

第 3 講　PART2 確認問題

1 $|7|=$ [ア]

2 $|-4|=$ [イ]

3 $|1-\sqrt{3}|=$ [ウ]

[ウ] は，次の①～④のうちから選べ。

① $\sqrt{3}$　　② $1-\sqrt{3}$

③ $\sqrt{3}-1$　　④ $(1-\sqrt{3})^2$

4 数直線上において，2 点 A(1)，B(6) 間の距離は [エ] である。

5 数直線上において，2 点 A(−3)，B(3) 間の距離は [オ] である。

6 数直線上において，2 点 A(−2)，B(−7) 間の距離は [カ] である。

PART3 根号を含む式の計算

要点① 平方根

2 乗すると a になる数を，a の「　　　　」という。

$a>0$ のとき，a の平方根のうち正の方を　　，負の方を　　　と表す。これらをまとめて　　と表すことができる。記号 $\sqrt{}$ を根号といい，$\sqrt{a}$ をルート a と読む。

$a=0$ のとき，a すなわち 0 の平方根は 0 だけであり，$\sqrt{0}=0$ とする。

どのような実数も，2 乗すると 0 以上になり，負の数になることはない。したがって，$a<0$ のとき，a の平方根は，実数の範囲では存在しない。

例 2 の平方根は　　と　　　である(2 つをまとめて　　　　と表すことができる)。
$\sqrt{9}$ は 9 の　　　　　　　　であり，$-\sqrt{9}$ は 9 の　　　　　　　　である。
よって $\sqrt{9}=$　，$-\sqrt{9}=$　　である。

$(\sqrt{5})^2=$　，$(-\sqrt{5})^2=$　である。
また，$\sqrt{6^2}=\sqrt{36}=$　，$\sqrt{(-6)^2}=\sqrt{36}=$　である。
一般に，次のことが成り立つ。

1　$a \geqq 0$ のとき　$(\sqrt{a})^2=a$，$(-\sqrt{a})^2=a$

2　$a \geqq 0$ のとき　$\sqrt{a^2}=a$
　　$a<0$ のとき　$\sqrt{a^2}=-a$
　　すなわち $\sqrt{a^2}=|a|$

要点② 平方根の積と商

平方根の積と商について，次のことが成り立つ。

$a>0$，$b>0$，$k>0$ のとき

1 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　**2** $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$　**3** $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

1 の証明

$\sqrt{a}\sqrt{b}$ を2乗すると

$$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=$$

ここで，$\sqrt{a}>0$，$\sqrt{b}>0$ より，$\sqrt{a}\sqrt{b}>0$

よって，$\sqrt{a}\sqrt{b}$ は　の　である。

したがって，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

2 も同様に証明することができる。

1 より $\sqrt{k^2a}=$　　$=k\sqrt{a}$ であるから，**3** も成立。

例 $\sqrt{2}\sqrt{3}=$　　$\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=$

$\sqrt{80}=$

要点③ 分母の有理化

「分母の有理化」… 分母に根号を含む式を変形し，分母に根号を含まない式にすること

例 $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\qquad}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}$

分母が $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ や $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ の形の場合は，乗法公式

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

を用いて分母を有理化することができる。

例 $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\qquad\qquad}$

3 (1) 次の式を計算せよ。

(i) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$ (ii) $\sqrt{12}-\sqrt{27}$

(iii) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$ (iv) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$

(2) 次の式の分母を有理化せよ。

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ (iii) $\dfrac{4}{3+\sqrt{7}}$

Point Pickup

根号を含む式の計算

・$\sqrt{}$ の中を素因数分解し，$\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$ を用いて，$\sqrt{}$ の中の数を小さくする。

・$(\sqrt{a})^2=a$，$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ と乗法公式を用いて，文字式と同じように四則計算を行う。

分母の有理化

$(\sqrt{a})^2=a$，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=$　　　を利用し，分母に根号を含まない形に。

第 3 講 PART3 確認問題

次の式を計算をせよ。

1 $\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$

2 $\sqrt{8}-\sqrt{18}=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}$

3 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=\boxed{オ}-\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$

4 $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=\boxed{ク}$

次の式の分母を有理化せよ。

5 $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{\boxed{ケコ}}}{\boxed{サ}}$

6 $\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\boxed{シ}}-\sqrt{\boxed{ス}}}{\boxed{セ}}$

7 $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}=\boxed{ソ}+\sqrt{\boxed{タ}}$

第 4 講　1 次不等式

PART1　1 次不等式とその解き方

要点 ①　不等式と不等号

「　　　　　」… 数量の大小関係を，不等号を用いて表した式

a　b … a は b より小さい

a　b … a は b より大きい

a　b … a は b 以下(a は b より小さい，または b と等しい)

a　b … a は b 以上(a は b より大きい，または b と等しい)

2 つの実数 a，b について，$a>b$，$a=b$，$a<b$ のうち，いずれか 1 つのみが成り立つ。

要点 ②　不等式の性質

不等式において，不等号の左側の部分を左辺，右側の部分を右辺といい，左辺と右辺を合わせて両辺という。以下の「等式の性質」が，不等式においても成立するかを考える。

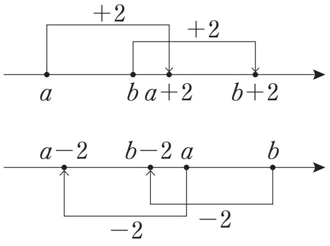
$A=B$ ならば

1　$A+C=B+C$，$A-C=B-C$　　**2**　$AC=BC$，$\dfrac{A}{C}=\dfrac{B}{C}$ (ただし，$C \neq 0$)

$a<b$ のとき

$a+2<b+2$，$a-2<b-2$

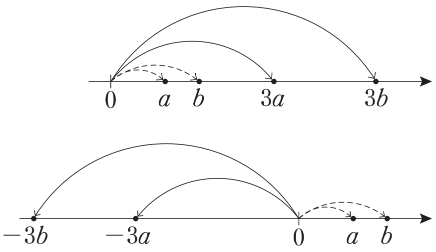
に見られるように，両辺に同じ数を足しても，両辺から同じ数を引いても，大小関係は変わらない。



$a>0$，$b>0$，$a<b$ のとき

$3a<3b$，$-3a$　$-3b$

である。つまり，両辺に同じ正の数を掛けても大小関係は変わらないが，両辺に同じ負の数を掛けると，大小関係が入れ替わり，不等号の向きが変わる。



これは，$a<0$，$b>0$，$a<b$ のとき，$a<0$，$b<0$，$a<b$ のときも同様である。

また，両辺を同じ数で割るときは，その逆数を掛けると考えれば，同様のことが成り立つ。

一般に，不等式に関して次の性質が成り立つ。

不等式の性質

1　$A<B$ ならば　$A+C<B+C$，$A-C<B-C$

2　$A<B$，$C>0$ ならば $AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

3　$A<B$，$C<0$ ならば $AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

とくに **3** について，不等式の両辺に同じ　　　　　　　　　　，両辺を同じ
　　　　　　　すると，　　　　　　　　　　　　ことを表している。

要点 ③ 不等式の解

x についての不等式を満たす x の値を，その不等式の「　　」という。

例　不等式 $2x-1<2$ について

$x=1$ はこの不等式の解　　　　　が，$x=2$ はこの不等式の解　　　　　。

不等式の　　　　　　　　を求めることを，その不等式を「　　　」という。これ以降は，不等式のすべての解を，その不等式の解とする。

不等式の性質 **1** により，方程式と同様，「　　　」することができる。不等式のすべての項を左辺に移項したとき，$x+3>0$，$2x-5\leqq 0$ のように，左辺が x の 1 次式になる不等式を，x についての「　　　　　　　」という。

不等式の性質を用いて，1 次不等式を解くことができる。

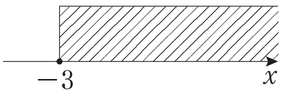
例　$-2x+1\leqq 7$ を解く

移項して　$-2x\leqq 7-1$

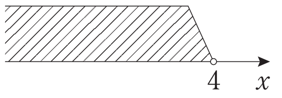
整理して　$-2x\leqq 6$

両辺を -2 で割って　$x\geqq -3$

$x\geqq -3$ で表される x の範囲を数直線上に表すと右図のようになる。図中の黒丸は，その数が範囲に含まれることを表す。



$x<4$ で表される x の範囲を数直線上に表すと右図のようになる。図中の白丸は，その数が範囲に含まれないことを表す。



1 次の 1 次不等式を解け。

(1) $7x+8<4x-13$

(2) $3(x-2)\leqq 2(5x+4)$

(3) $0.5x+0.2>-0.1x+1.6$

(4) $\dfrac{1}{2}x+2\geqq\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{6}$

Point Pickup

不等式の性質

1 $A<B$ ならば $A+C<B+C$，$A-C<B-C$

2 $A<B$，$C>0$ ならば $AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$

3 $A<B$，$C<0$ ならば $AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

不等式の両辺に同じ負の数を掛けたり，両辺を同じ負の数で割ったりすると，不等号の「　　　」が変わる

1 次不等式の解法

1 次方程式を解くときと同様に

① かっこ ⇒「　　　　　」 小数 ⇒「　　　　　　」 分数 ⇒「　　　　　　　」

② x の項を左辺に，数の項を右辺に集約し両辺を x の係数で割る。

第 4 講 PART1 確認問題

1 不等式 $2x+1>5x+7$ の解は，x ア イウ である。

ア は次の①，②のうちから選べ。

① $>$　　② $<$

2 不等式 $5(x-1)<3(x+3)$ の解は，x エ オ である。

エ は次の①，②のうちから選べ。

① $>$　　② $<$

3 不等式 $0.3x+0.8 \geqq -0.2x+2.3$ の解は，x カ キ である。

カ は次の①，②のうちから選べ。

① $\geqq$　　② $\leqq$

4 不等式 $\frac{1}{3}x+1 \leqq \frac{3}{2}x-\frac{1}{6}$ の解は，x ク ケ である。

ク は次の①，②のうちから選べ。

① $\geqq$　　② $\leqq$

PART2 いろいろな 1 次不等式

要点① 連立不等式

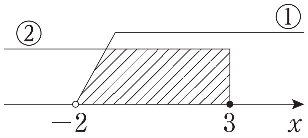
2 つ以上の不等式を組み合わせたものを「　　　　　　　」という。それらの不等式を同時に満たす x の値の範囲をその連立不等式の「　　」といい，連立不等式の解を求めることを，その連立不等式を「　　　」という。

例 連立不等式 $\begin{cases} 2x+3<4x+7 \\ 6x-1\leqq 3x+8 \end{cases}$ を解く。

$2x+3<4x+7$ より $x>-2$ ……①

$6x-1\leqq 3x+8$ より $x\leqq 3$ ……②

①と②の共通範囲を求めて



不等式 $A<B<C$ は，2 つの不等式　　　，　　　が同時に成り立つことを表した式である。

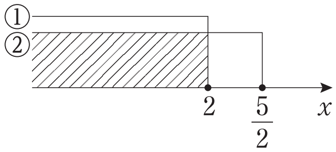
よって，不等式 $A<B<C$ は，連立不等式 $\begin{cases} \quad \\ \quad \end{cases}$ と同じである。

例 不等式 $2x+2\leqq x+4\leqq 9-x$ を解く。

$\begin{cases} \qquad\qquad \text{……①} \\ \qquad\qquad \text{……②} \end{cases}$

①より $x\leqq 2$　　②より $x\leqq \dfrac{5}{2}$

①と②の共通範囲を求めて



要点② 1 次不等式の利用

1 次不等式を利用して，身近にある問題を解決する。

例 ある商品を，A 商店では 100 円で売っている。同じ商品を，B 商店では 10 個まで 110 円，10 個を超えた分について 1 個 90 円で売っている。この商品をいくつか買うとき，A 商店で買うより B 商店で買う方が安くなるのは，この商品を何個以上買うときか。

この商品を x 個買うとすると，10 個までは A 商店の方が安いので，$x\geqq$　　である。

条件より $100x \quad 110\times \quad +90$

$10x>110+9(x-10)$

$x>20$

x は整数より　　　　　　　よって，　　個以上買うとき

2 (1) 連立不等式 $\begin{cases} -x+4>2x-2 \\ 5x+3 \geqq 3x+1 \end{cases}$ を解け。

(2) 不等式 $-3x-2 \leqq 2x+1 < 5x-11$ を解け。

(3) 1時間400円で借りることができる自習スペースがある。入会金500円を払って会員になると，1時間あたり1割引で借りることができる。入会してこの自習スペースを借りる場合，何時間以上利用すれば入会しないで利用するより安くなるか。
ただし，このスペースの利用は1時間単位である。

Point Pickup

連立不等式の解法

① それぞれの不等式を解き，その解を数直線上に図示する。
② 数直線の図より，それぞれの解の「　　　　　　　」を求める。

1次不等式の利用（文章題）

① 求めたいものを x とおき，それと関連するものの数量を x を用いて表す。
② 数量関係を不等式で表す。
③ 不等式を解き，解のうち題意に適するものを答える。

第 4 講　PART2 確認問題

1　連立不等式 $\begin{cases} 3x > 8-x \\ x+3 \geqq 5x-9 \end{cases}$ の解は，[ア] である。

[ア] は，次の①～④のうちから選べ。

① $x > 2$　　② $x \geqq 3$

③ $2 < x \leqq 3$　　④ $2 \leqq x < 3$

2　不等式 $-x+6 \leqq 3x-2 < 6x+1$ の解は，[イ] である。

[イ] は，次の①～④のうちから選べ。

① $x < -1$　　② $x \leqq 2$

③ $x \geqq 2$　　④ $-1 < x \leqq 2$

3　あるテーマパークの 1 回の入場料は 3000 円であるが，5000 円を払って会員になると，入場料が 2 割引になるという。会員になって入場する場合，何回以上入場すれば，会員にならずに入場するよりも合計の金額が安くなるか。[ウ]

答えは，最も適するものを次の①～④のうちから選べ。

① 8 回以上　　② 9 回以上

③ 10 回以上　　④ 11 回以上

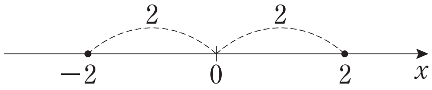
PART3 絶対値を含む方程式・不等式

要点 ① 絶対値を含む方程式・不等式

方程式 $|x|=2$ を解く。

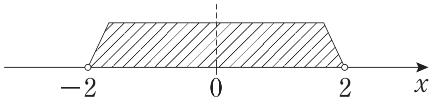
$|x|$ は，原点と実数 x が表す点との

を表す。よって，$|x|=2$ の解は

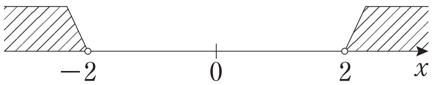


$x=$

不等式 $|x|<2$ の解は



不等式 $|x|>2$ の解は



一般に，次のことが成り立つ。

絶対値を含む方程式・不等式

$c>0$ のとき

方程式 $|x|=c$ の解は　$x=\pm c$

不等式 $|x|<c$ の解は　$-c<x<c$

不等式 $|x|>c$ の解は　$x<-c$，$c<x$

例　方程式 $|x+1|=5$ を解く。

$x+1=X$ とおくと　$|X|=5$ より $X=$

よって　　　　　より $x=$　　　　　したがって $x=$　,

不等式 $|x+1|\leqq 5$ を解く。

$x+1$

各辺に　　を加えて　　　　x

[MEMO]

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $|x|=3$　　(ii) $|x-1|=3$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $|x|<3$　　(ii) $|x+2|<3$

(iii) $|x|\geqq 3$　　(iv) $|x-3|\geqq 3$

Point Pickup

絶対値を含む方程式・不等式

$c>0$ のとき　方程式 $|x|=c$ の解は　$x=\pm c$

不等式 $|x|<c$ の解は　$-c<x<c$

不等式 $|x|>c$ の解は　$x<-c$，$c<x$

第 4 講 PART3 確認問題

1 $|x|=2$ の解は，$x=\pm$ ア

2 $|x+2|=5$ の解は，

$x=$ イ ，ウエ

3 $|x|<4$ の解は，オカ $<x<$ キ

4 $|x-2|<3$ の解は，クケ $<x<$ コ

5 $|x|\geqq 5$ の解は，$x\leqq$ サシ ，ス $\leqq x$

6 $|x-3|\geqq 2$ の解は，$x\leqq$ セ ，ソ $\leqq x$

第5講　集合，命題と条件

PART1　集合と要素，部分集合

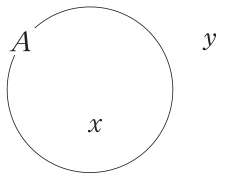
要点① 集合

「　　　」… 範囲のはっきりしたものの集まり

例　「10以下の自然数」の集まり …… 集合といえる

「小さな数」の集まり …… 集合とはいえない

「　　　」… 集合を構成する1つ1つのもの。



x が集合 A の要素であるとき，x は A に「　　　　」といい，x　A と表す。また，y が集合 A の要素でないことを y　A と表す。

例　正の数全体の集合を A とすると　1　A，-2　A

要点② 集合の表し方

集合の表し方には，次の2通りの方法がある。

1　要素を書き並べる方法　　**2**　要素が満たす条件を書く方法

例　10の正の約数全体の集合を A とすると

1 の方法では　$A=$

2 の方法では　$A=$

1 の表し方において，要素の個数が多い場合や，要素の個数が有限個でない場合は，省略記号 …… を使って表すことがある。

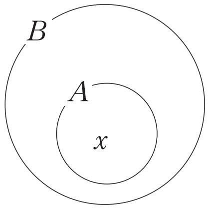
例　20以下の正の偶数の集合を A とすると　$A=\{$　　　　　　$\}$

5の正の倍数の集合を B とすると　$B=\{$　　　　　　$\}$

※要素の個数が有限個である集合を有限集合，要素の個数が有限個ではない集合を無限集合という。

要点③ 部分集合と空集合

2つの集合 A，B において，A のすべての要素が B の要素でもある



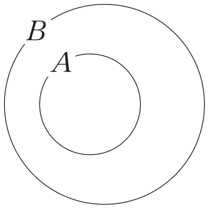
すなわち

$x \in A$ ならば $x \in B$

が成り立つとき，A は B の「　　　　　」であるといい，A　B

と表す。このとき，A は B に「　　　　　」，または B は A を

「　　　」という。



例　$A=\{2,\ 4\}$，$B=\{x \mid x$ は5以下の自然数$\}$ のとき，

　　は　の部分集合であり，A　B と表す。

集合 A 自身も，A の部分集合である。つまり

$A \subset A$

である。

2つの集合 A，B の要素がすべて一致しているとき，A と B は「　　　　　」といい，

A　B

と表す。$A=B$ であることは，「$A \subset B$ かつ $A \supset B$」であることと同じである。

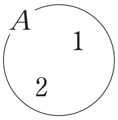
「　　　　　」… 要素が1つもない集合。　と表す。

集合 A に対して，空集合も A の部分集合，と考える。つまり

$\varnothing \subset A$

である。

例　$A=\{1,\ 2\}$ の部分集合をすべて挙げると



$\{1,\ 2\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，

1 (1)　次の集合を，{　　　}の中に要素を書き並べて表せ。

(i)　1以上30以下の3の倍数全体の集合 A

(ii)　24の正の約数全体の集合 B

(2)　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ と次の集合との間に成り立つ関係を，記号 $\subset$，$=$ を用いて表せ。

(i)　$B=\{2,\ 3\}$　　(ii)　$C=\{x\mid x$ は10以下の素数$\}$

(iii)　$D=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$　　(iv)　$E=\varnothing$

Point Pickup

集合の表し方

要素を{　}の中に書き並べて表す。要素が満たす条件を書く方法もある。

集合の包含関係

A は B の部分集合 …… A の要素が B にすべて含まれている。A　　B と表す。

A と B は等しい …… A，B の要素がすべて一致。A　　B と表す。

第 5 講　PART1 確認問題

1　1 以上 30 以下の 7 の倍数全体の集合を A とすると，

$A=\{$ ア ， イウ ， エオ ， カキ $\}$

である。ただし，要素は小さい方から順に並べること。

2　15 の正の約数全体の集合を B とすると，

$B=\{$ ク ， ケ ， コ ， サシ $\}$

である。ただし，要素は小さい方から順に並べること。

3　$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ のとき，

ス である。

ス は，次の①～③のうちから選べ。

①　$A\subset B$　　②　$A\supset B$　　③　$A=B$

4　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$，$B=\{x\,|\,x$ は 11 以下の素数$\}$

のとき， セ である。

セ は，次の①～③のうちから選べ。

①　$A\subset B$　　②　$A\supset B$　　③　$A=B$

5 $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$，$B=\{2n \mid n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ のとき，

[ソ] である。

[ソ] は，最も適当なものを，次の①～③のうちから選べ。

①　$A \subset B$　　②　$A \supset B$　　③　$A=B$

6 $A=\phi$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ のとき，[タ] である。

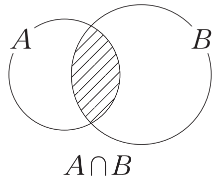
[タ] は，次の①～③のうちから選べ。

①　$A \subset B$　　②　$A \supset B$　　③　$A=B$

[MEMO]

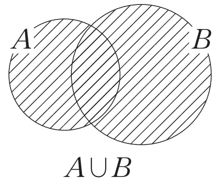
PART2 共通部分と和集合，全体集合と補集合

要点① 共通部分と和集合



「　　　　　　」… 2つの集合 A，B の　　　に属する要素全体の集合。A　B と表す。

$A\cap B=\{x\,|\,x\in A$　　　$x\in B\}$



「　　　　　」… 2つの集合 A，B の　　　　　　　　　　に属する要素全体の集合。A　B と表す。

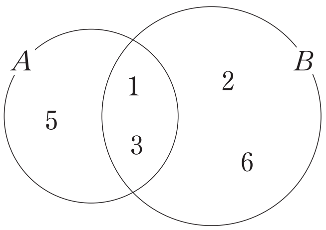
$A\cup B=\{x\,|\,x\in A$　　　　　$x\in B\}$

※「$x\in A$ または $x\in B$」は，x が A，B どちらか一方のみに属する場合だけでなく，A，B 両方に属する場合も含む。

例　$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ のとき

$A\cap B=\{$　　$\}$

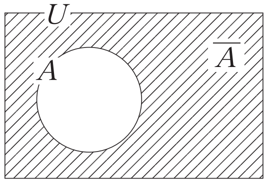
$A\cup B=\{$　　　　　　$\}$



右図のように，集合とその要素を図に表したものを「　　　　　　」という。

要点② 全体集合と補集合

集合を考えるとき，1つの集合 U を最初に定め，要素としては U の要素のみを，集合としては U の部分集合のみを考えることが多い。このとき，集合 U を「　　　　　　」という。



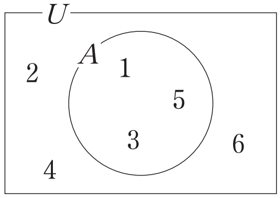
「　　　　　」… 全体集合 U の部分集合 A に対して，A に　　　　　　　要素全体の集合。　　と表す。

$\overline{A}=\{x\,|\,x\in U$ かつ $x\notin A\}$

例　$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を全体集合とする。

U の部分集合 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$ について

$\overline{A}=\{$　　　$\}$



補集合について，次のことが成り立つ。

$$A\cap\overline{A}=\quad,\ A\cup\overline{A}=\quad,\ \overline{\overline{A}}=$$

※$\overline{\overline{A}}$ は $\overline{A}$ の補集合を表す。

要点 ③ ド・モルガンの法則

2 つの集合 A，B について，次の「ド・モルガンの法則」が成り立つ。

ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

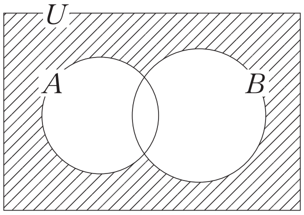
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ について

$\overline{A\cup B}$ は下図 [1] の斜線部分である。

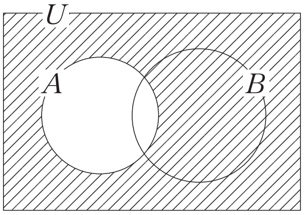
また，$\overline{A}$，$\overline{B}$ はそれぞれ下図 [2]，[3] の斜線部分であり，その共通部分である $\overline{A}\cap\overline{B}$ は下図 [1] の斜線部分である。

したがって，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ が成り立つ。

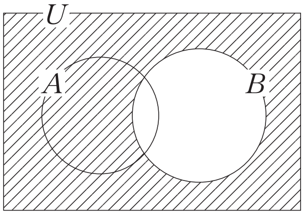
[1] $\overline{A\cup B}$



[2] $\overline{A}$



[3] $\overline{B}$



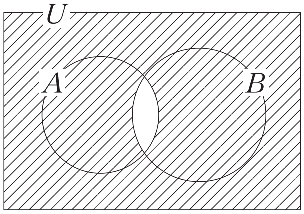
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ について

$\overline{A\cap B}$ は右図 [4] の斜線部分である。

また，$\overline{A}$，$\overline{B}$ はそれぞれ上図 [2]，[3] の斜線部分であり，その和集合である $\overline{A}\cup\overline{B}$ は右図 [4] の斜線部分である。

したがって，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ が成り立つ。

[4] $\overline{A\cap B}$



2 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とする。2つの集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ について，次の集合の要素を求めよ。

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}$

(4)　$\overline{A}\cap B$　　(5)　$\overline{A\cup B}$　　(6)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

Point Pickup

集合の共通部分，和集合，補集合

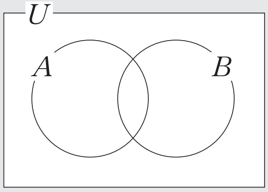
ベン図を用いて整理するとよい。主な手順は以下。

① 右図のようにベースとなる図をかく。

② 共通部分 $A\cap B$ の要素を書き入れる。

③ A，B の要素のうち，$A\cap B$ の要素ではないものを書き入れる。

④ U のうち，和集合 $A\cup B$ の要素ではないものを書き入れる。



ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

第５講　PART2 確認問題

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とし，その部分集合を

$$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\},\ B=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

とする。次の問いに答えよ。ただし，要素は小さい方から順に並べること。

1 $A\cap B=\{$ ア , イ $\}$

2 $A\cup B=\{1,$ ウ , エ , オ , カ , キ $, 9\}$

3 $\overline{A}=\{$ ク , ケ , コ , サ , シス $\}$

4 $\overline{A}\cap B=\{$ セ , ソ $\}$

5 $\overline{A\cup B}=\{$ タ , チ , ツテ $\}$

6 $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,\ 2,$ ト , ナ , ニ , ヌ , ネ $, 10\}$

PART3 命題と条件

要点① 命題

「　　　」… 正しいか正しくないかが明確に決まる文や式。

例「-1 は自然数である」は 命題

「10000 は大きい数である」は 命題

命題が正しいとき，その命題は「　　」

命題が正しくないとき，その命題は「　　」

であるという。

例「2 は 6 の約数である」は　　の命題である。

「$\sqrt{(-2)^2}=-2$」は　　の命題である。

要点② 命題と条件

「　　　」… 文字を含む文や式のうち，文字のとる値を変えると真偽が変わるもの。

例「$x>2$」… $x=3$ のとき　　，$x=2$ のとき

x に関する 2 つの条件を

$p:x>3$，$q:x\geqq 0$

とする。命題「$x>3$ ならば $x\geqq 0$」は，p，q を用いると

「p ならば q」

と表される。この命題を，記号「　　」を用いて

「p　　q」

と表すことができる。

「$p \Rightarrow q$」という形の命題において

p をこの命題の「　　　」，q をこの命題の「　　　」

という。命題「$x>3 \Rightarrow x\geqq 0$」においては

条件　　が仮定，条件 x　　が結論

である。

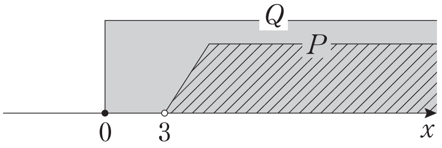
要点③　命題の真偽と集合

命題「$x>3$ ならば $x \geqq 0$」は真である。これを，集合を用いて考える。

条件 $x>3$ を満たす実数 x 全体の集合を P

条件 $x \geqq 0$ を満たす実数 x 全体の集合を Q

とすると，P　　Q である。これを，数直線で表すと右図のようになる。

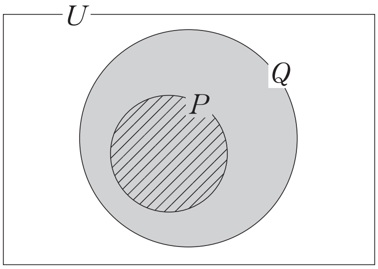


命題「$p \Rightarrow q$」の条件 p，q について，全体集合 U の要素の中で

条件 p を満たすもの全体の集合を P

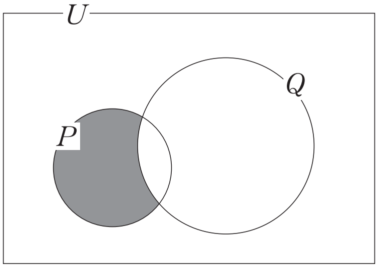
条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，p を満たすものはすべて q を満たす，すなわち P　　Q が成り立つことと同じである。



命題「$p \Rightarrow q$」が偽であるのは，仮定 p を満たすが，結論 q を満たさないものが存在するということである。それは，P に属しているが Q に属さない要素，すなわち　　　　に属する要素が存在する，ということである。

この要素を，この命題の「　　　」という。



一般的に，命題が偽であることを示すには，反例を1つあげればよい。

例　命題「$x^2=4$ ならば $x=2$」について

$x^2=4$ より $x=2$，-2

よって，反例 $x=$　　が存在するので，この命題は　　である。

3 (1) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i) $x=0$ ならば $xy=0$　　(ii) $x^2=y^2$ ならば $x=y$

(iii) n は 18 の正の約数 $\Rightarrow$ n は 12 の正の約数

(2) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(i) $x<2 \Rightarrow x<5$

(ii) $2<x<5 \Rightarrow 3<x<7$

Point Pickup

命題の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」について，条件 p を満たすものが

条件 q をすべて満たす …… 命題は真

条件 q を満たさないもの(反例)がある …… 命題は偽

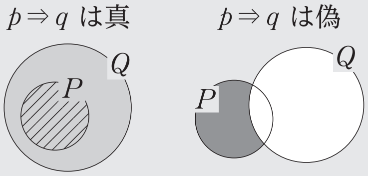
まずは，反例がないかを調べる。

集合を用いた命題の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」について，条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

$P \subset Q$ …… 命題は真

$P \cap \overline{Q}$ の要素が存在する …… 命題は偽



実数の範囲を考えるときは，数直線を活用するとよい。

第 5 講　PART3 確認問題

次の命題の真偽を，①～③のうちから選べ。ただし，x は実数，n は自然数とする。

1　$x=-3$ ならば，$x^2=9$ である。　ア

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

2　$x^2=2x$ ならば，$x=2$ である。　イ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

3　n は 10 の正の約数ならば，n は 5 の正の約数　ウ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

4　$x>1 \Longrightarrow x>0$　エ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

5　$-2<x<2 \Longrightarrow 0<x<1$　オ

①　真　　②　偽　　③　真でも偽でもない

PART4 必要条件と十分条件，条件の否定

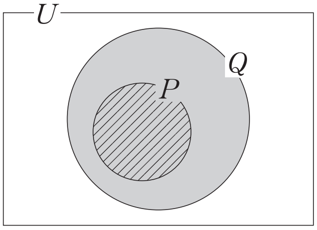
要点① 必要条件と十分条件

２つの条件 p，q について，命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき，条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると $P \subset Q$ である。このとき，

p は q であるための「　　　　　　　」

q は p であるための「　　　　　　　」

という。



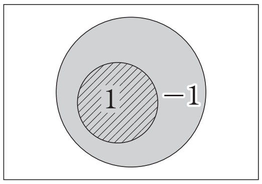
例　x を実数とするとき，命題「$x=1 \Rightarrow x^2=1$」は真である。

よって

$x=1$ は $x^2=1$ であるための「　　　条件」

$x^2=1$ は $x=1$ であるための「　　　条件」

である。



２つの命題 $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ がともに真であるとき，「p　q」と表し，p は q であるための「　　　　　　　　　」という。このとき，q は p であるための必要十分条件である。

p　q のとき，p と q は「　　　」であるという。

例　x を実数とするとき「$x=0 \Rightarrow x^2=0$」，「$x^2=0 \Rightarrow x=0$」はともに真である。

よって

$x=0$ は $x^2=0$ であるための必要十分条件

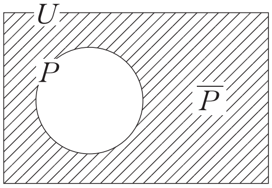
$x^2=0$ は $x=0$ であるための必要十分条件

であり，$x=0$ と $x^2=0$ は同値である。

要点② 条件の否定

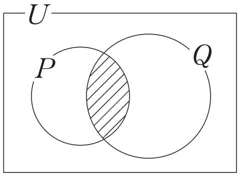
条件 p に対して，条件「p でない」を条件 p の「　　　」といい，と表す。条件 $\overline{p}$ の否定 $\left(\overline{\overline{p}}\right)$ は p である。

条件 $\overline{p}$ を満たすもの全体の集合は，条件 p を満たすもの全体の集合 P の補集合 $\overline{P}$ である。

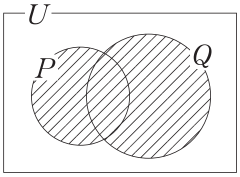


例　x を実数とするとき，条件「$x>1$」の否定は　「　　　」
x を整数とするとき，条件「x は偶数である」の否定は　「x は　　　　である」

条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると
条件「p かつ q」を満たすもの全体の集合は　P　Q
条件「p または q」を満たすもの全体の集合は　P　Q
である。



p かつ q



p または q

ド・モルガンの法則により

$$\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q},\ \overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$$

が成り立つことから，条件 p，q に関して，次のことが成り立つ。

「p かつ q」の否定，「p または q」の否定

$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ または $\overline{q}$，$\overline{p\text{または}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

例　x，y を実数とするとき
「$x=1$ かつ $y=2$」の否定は　「$x \neq 1$　　　　　$y \neq 2$」
「$x>0$ または $y>0$」の否定は　「$x \leqq 0$　　　$y \leqq 0$」

4　x，y は実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　次の $\boxed{}$ に「必要条件であるが十分条件ではない」「十分条件であるが必要条件ではない」「必要十分条件である」「必要条件でも十分条件でもない」のうち適切なものを入れよ。

(i)　$x=3$ は $x^2=3x$ であるための $\boxed{}$。

(ii)　$x \leqq 2$ は $x<2$ であるための $\boxed{}$。

(iii)　$x=0$ は，$|x|=0$ であるための $\boxed{}$。

(iv)　$xy>0$ は，$x+y>0$ であるための $\boxed{}$。

(2)　次の条件の否定を述べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　x は有理数である。　(ii)　$x=0$ かつ $y=0$　(iii)　$x<4$ または $y \geqq -2$

Point Pickup

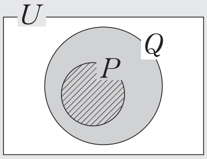
必要条件・十分条件

条件 p，q について

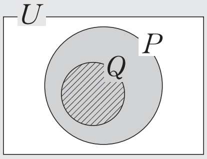
$p \Rightarrow q$ が真ならば，p は q であるための　　　　条件

$q \Rightarrow p$ が真ならば，p は q であるための　　　　条件

$p \Leftrightarrow q$ ならば，p は q であるための　　　　条件



p は十分条件



p は必要条件

$p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$ がともに偽ならば，p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

条件の否定

条件 p の否定 $\overline{p}$，条件 q の否定 $\overline{q}$ について

$\overline{p\text{かつ}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ または $\overline{q}$，$\overline{p\text{または}q} \Leftrightarrow \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

第 5 講　PART4 確認問題

x，y は実数とする。

1　$x=2$ は，$x^2=4$ であるための ア 。

ア は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

2　$x<1$ は，$2x+3<1$ であるための イ 。

イ は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

3　$x^2=25$ は，$|x|=5$ であるための ウ 。

ウ は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない
② 十分条件であるが必要条件ではない
③ 必要十分条件である
④ 必要条件でも十分条件でもない

4 $xy<0$ は，$x+y<0$ であるための エ 。

エ は，次の①～④のうちから選べ。

① 必要条件であるが十分条件ではない

② 十分条件であるが必要条件ではない

③ 必要十分条件である

④ 必要条件でも十分条件でもない

5 「x は正の数である」

この条件の否定は オ である。

オ は次の①～③のうちから選べ。

① x は 0 である。

② x は負の数である。

③ x は 0 以下の数である。

6 「$x=1$ かつ $y=2$」

この条件の否定は カ である。

カ は次の①～③のうちから選べ。

① $x \neq 1$ かつ $y \neq 2$

② $x>1$ または $y>2$

③ $x \neq 1$ または $y \neq 2$

7 「$x>0$ または $y \leqq 1$」

この条件の否定は キ である。

キ は次の①～③のうちから選べ。

① $x<0$ かつ $y>1$

② $x \leqq 0$ かつ $y>1$

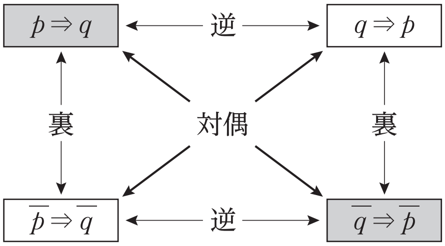
③ $x \leqq 0$ または $y>1$

[MEMO]

第 6 講　命題と論証

PART1　逆・裏・対偶

要点 ①　命題の逆・裏・対偶



命題 $p\Rightarrow q$ に対して

$q\Rightarrow p$ を $p\Rightarrow q$ の「　　」

$\overline{p}\Rightarrow\overline{q}$ を $p\Rightarrow q$ の「　　」

$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ を $p\Rightarrow q$ の「　　　」

という。

例　x を実数とするとき，命題「$x=1\Rightarrow x^2=1$」の

逆は　「　　　$\Rightarrow$　　　」

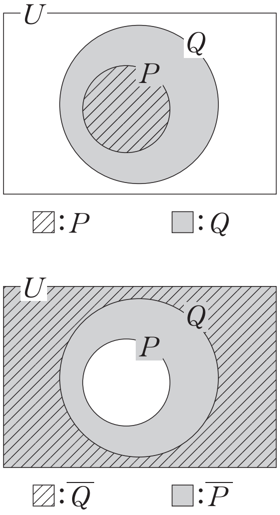
裏は　「　　　$\Rightarrow$　　　」

対偶は「　　　$\Rightarrow$　　　」

命題「$x=1\ \Rightarrow\ x^2=1$」は真であるが，その逆「$x^2=1\ \Rightarrow\ x=1$」は偽（反例：$x=-1$）である。一般的に，次のことがいえる。

> 命題が真であっても，その命題の逆は真とは限らない。

要点 ②　命題と対偶の真偽



全体集合 U の要素の中で条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

命題「$p\Rightarrow q$」が真　$\Leftrightarrow$　$P\subset Q$

対偶「$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$」が真　$\Leftrightarrow$　$\overline{Q}\subset\overline{P}$

である。右図より

$P\subset Q$　$\Leftrightarrow$　$\overline{Q}\subset\overline{P}$

であるから，命題「$p\Rightarrow q$」が真であることは，

その対偶「$\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$」が真であることと同じである。

よって，次のことがいえる。

命題と対偶の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽は一致する。

よって，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を判定するとき，その対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽の判定をすることで，もとの命題の真偽を判定することができる。

例 命題「$x+y<0 \Rightarrow x<0$ または $y<0$」の真偽について

この命題の対偶は「x y $\Rightarrow x+y$ 」

これは明らかに　　である。よって，もとの命題も　　である。

命題「$p \Rightarrow q$」の逆「$q \Rightarrow p$」と裏「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」は対偶の関係にあるから，逆と裏の真偽も一致する。

1　n は整数，x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

(1)　n が 2 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。

(2)　$x \neq 1$ ならば $x^2-4x+3 \neq 0$ である。

Point Pickup

逆・裏・対偶

命題 $p \Rightarrow q$ の

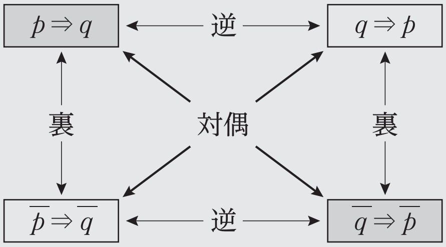
逆　$q \Rightarrow p$

裏　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

対偶　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

命題とその対偶の真偽は一致する。

また，逆と裏の真偽は一致する。



第 6 講　PART1 確認問題

1　n を整数として，次の命題を P とする。

「n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数である」

命題 P の逆・裏・対偶をそれぞれ述べよ。また，命題 P および逆・裏・対偶の真偽を調べよ。

		真偽
P	n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数である	エ
P の逆	ア	オ
P の裏	イ	カ
P の対偶	ウ	キ

[ア ~ ウ の選択肢]

① n が 3 の倍数ならば，n は 6 の倍数である

② n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数でない

③ n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数でない

④ n が 6 の倍数でないならば，n は 3 の倍数でない

[エ ~ キ の選択肢]

① 真　　② 偽

2 xを実数として，次の命題をPとする。

「$x \neq 1$ ならば，$x^2 \neq x$ である」

命題Pの逆・裏・対偶をそれぞれ述べよ。また，

命題Pおよび逆・裏・対偶の真偽を調べよ。

		真偽
P	$x \neq 1$ ならば，$x^2 \neq x$ である	サ
Pの逆	ク	シ
Pの裏	ケ	ス
Pの対偶	コ	セ

[ク ～ コ の選択肢]

① $x = 1$ ならば，$x^2 \neq x$ である

② $x = 1$ ならば，$x^2 = x$ である

③ $x^2 = x$ ならば，$x = 1$ である

④ $x^2 \neq x$ ならば，$x \neq 1$ である

[サ ～ セ の選択肢]

① 真　　② 偽

[MEMO]

PART2 命題と証明

要点 ① 対偶を利用する証明

命題 $p \Rightarrow q$ を証明するとき，その対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ が真であることを示すことで，もとの命題が真である，と証明することができる。

例 n を整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明する。

この命題の対偶は「　が　　ならば，　は　　である」。これを示す。

n が奇数のとき，n は整数 k を用いて

$n=$

と表される。このとき

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=$

$2k^2+2k$ は　　であるから，n^2 は奇数である。

よって，　　　　　　　　である。

要点 ② 背理法による証明

「背理法」… ある命題を証明するとき，その命題が　　　　　　すると，　　が生じることを示し，それによってもとの命題が成り立つことを証明する方法。

例 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+1$ が無理数であることを証明する。

$\sqrt{2}+1$ が　　　　　　と仮定すると，$\sqrt{2}+1$ は　　　　であるから，

$\sqrt{2}+1=r$（r は　　　　）

とおくと

$\sqrt{2}=r-1$

r は　　　　より，$r-1$ も　　　　である。

よって，$\sqrt{2}$ が無理数であることに　　する。

したがって，$\sqrt{2}+1$ は無理数である。

[MEMO]

2 (1) n を整数とする。n^2 が 3 の倍数でないならば, n は 3 の倍数ではないことを証明せよ。

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$1-2\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

Point Pickup

対偶を利用する証明

命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽が一致することを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

背理法

証明する命題が成り立たないと仮定し，その仮定のもとで矛盾を導くことで，立てた仮定が間違っている，よってもとの命題が成り立つ，とする証明方法。

第 6 講　PART2 確認問題

1 n を整数とする。n^2 が奇数ならば，n は奇数であることを証明せよ。

〔証明〕

与えられた命題の対偶は，

n が ［ア］ ならば，n^2 は ［イ］ である

これを証明する。

n が ［ア］ のとき，n は整数 k を用いて

$n=$ ［ウ］ と表される。このとき，

$n^2=$ ［エ］

$2k^2$ は整数であるから，n^2 は ［オ］ である。

対偶が真であるから，もとの命題も真である。

[［ア］，［イ］，［オ］ の選択肢]

① 偶数　　② 奇数

[［ウ］，［エ］ の選択肢]

① $2k$　　② $2k+1$

③ $2\cdot2k^2$　　④ $2(2k^2+2k)+1$

2 $\sqrt{2}$ が無理数であることを利用して，$3\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

〔証明〕

$3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$3\sqrt{2}$ は [カ] であるから，[カ] である r を用いて，

$$3\sqrt{2}=r$$

とおくと，

$$\sqrt{2}=\boxed{\text{キ}}$$

r が有理数であるから，[キ] も有理数であり，$\sqrt{2}$ が [ク] であることに矛盾する。

したがって，$3\sqrt{2}$ は無理数である。

[[カ]，[ク] の選択肢]

① 有理数　　② 無理数

[[キ] の選択肢]

① $3r$　　② $r-3$　　③ $\frac{r}{3}$

【MEMO】

第 7 講　2次関数とグラフ

PART1　関数とその表し方

要点 ①　関数

2つの変数 x, y について, x の値を決めると, それに対応して y の値が　　　　　　決まるとき, y は x の「　　　」であるという。

y が x の関数であることを，文字 f などを用いて「 $y=$　　　」と表す。例えば，1次関数 $y=-3x$ を $y=f(x)$ とすると，$f(x)=-3x$ と表される。$f(x)$ の f は，関数を表す式が異なれば異なる文字にする。

関数 $y=f(x)$ において，x の値 a に対応して決まる y の値を「　　　」と表し，$f(a)$ を $x=a$ のときの関数 $f(x)$ の「　　」という。

例　関数 $f(x)=3x+1$ において

$x=1$ のときの関数 $f(x)$ の値は

$x=-2$ のときの関数 $f(x)$ の値は

要点 ②　関数の定義域と値域

関数 $y=f(x)$ において，変数 x のとりうる値の範囲，すなわち x の変域を，この関数の「　　　　　」という。また，x が定義域全体を動くときの y のとりうる値の範囲，すなわち y の変域を，この関数の「　　　」という。

関数 $y=f(x)$ の定義域について，その定義域を式の後に(　　)をつけて

$$y=f(x)\quad(a \leqq x \leqq b)$$

のように表すことができる。

例　30km の道のりを，自転車で時速 10km で走った。出発してから x 時間経ったときの，残りの道のりを $y$km とすると

$y=$　　　　　(　　　　　) と表される。

[MEMO]

1 底辺と高さの和が 12cm の三角形がある。この三角形の底辺の長さを $x$cm，面積を $y$cm^2 とすると，y は x の関数である。次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。また，定義域も示せ。

(2) (1)の関数を $y=f(x)$ とする。次の値を求めよ。

(i) $f(4)$　　(ii) $f(8)$　　(iii) $f(t)$

Point Pickup

関数 $f(x)$ の値

関数 $y=f(x)$ において，$f(a)$ は $x=a$ のときの y の値である。

$f(a)$ は，x に a を「　　　」して求めることができる。

第 7 講　PART1 確認問題

1 縦と横の長さの和が 8cm の長方形がある。この長方形の縦の長さを $x$cm, 面積を $y$cm^2 とすると, y は x の関数である。

y を x の式で表すと,

$y=$ ア x^2+ イ x である。

また，この関数の定義域は,

ウ $<x<$ エ である。

$f(x)=-x^2+8x$ とするとき，次の問いに答えよ。

2 $f(2)=$ オカ である。

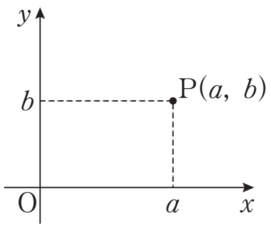
3 $f(7)=$ キ である。

4 $f(t)=$ ク t^2+ ケ t である。

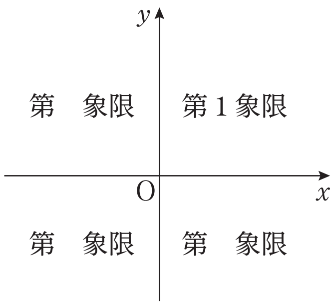
PART2　1 次関数のグラフと最大値，最小値

要点 ①　座標平面

平面上に，右図のように原点 O で直交する 2 つの数直線を座標軸 x 軸，y 軸として定めると，その平面上の点 P の位置は，2 つの実数の組 $(a,\ b)$ で表される。この組 $(a,\ b)$ を，点 P の「　　　」といい，$P(a,\ b)$ と表す。また，このときの a を x 座標，b を y 座標という。



座標軸の定められた平面を「座標平面」という。座標平面は，座標軸によって 4 つの部分に分けられ，右図のように
「　　　　　　　」「第　象限」「第　象限」「第　象限」という。
座標軸上の点は，どの象限にも含まれないものとする。



要点 ②　関数のグラフ

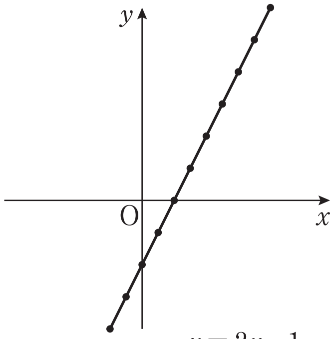
関数 $y=f(x)$ において，$y=f(x)$ を満たすような点 $(x,\ y)$ 全体で作られる図形を，この関数の「　　　　　」という。
例えば，関数 $y=2x-1$ のグラフは，右図のようにこの式を満たす点全体からなる図形である。

$y=2x-1$，$y=-3x$ のように，y が x を用いて

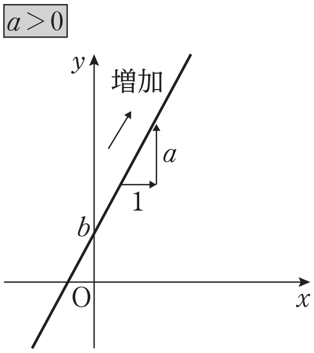
$(a,\ b$ は定数，$a \neq 0)$

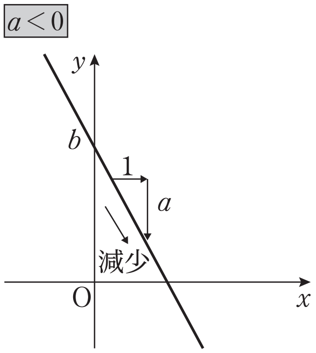
の形で表されるとき，y は x の「　　　　　」という。

1 次関数 $y=ax+b$ のグラフは，傾き　，切片が　の　　　である。



$y=2x-1$





要点 ③ 関数の最大値・最小値

関数の値域に最大の値があるとき，その値をこの関数の「　　　　　」といい，最小の値があるとき，その値をこの関数の「　　　　　」という。

例 関数 $y=-x+2\quad(1\leqq x<3)$ の最大値，最小値について

関数 $y=-x+2$ のグラフは，傾き -1，切片 2 の直線

関数 $y=-x+2$ において

$x=1$ のとき $y=1$

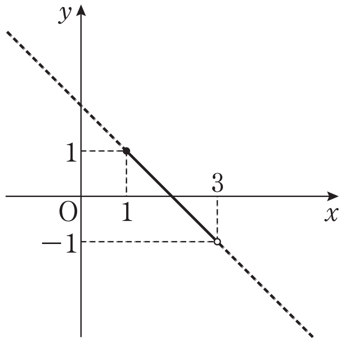
$x=3$ のとき $y=-1$

よって，グラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=1$ で　　　　　　をとる。

また，



2 (1) 次の点は，どの象限にあるか。

(i) $(-1,\ -2)$　(ii) $(3,\ 3)$　(iii) $(-5,\ 2)$　(iv) $(4,\ -1)$

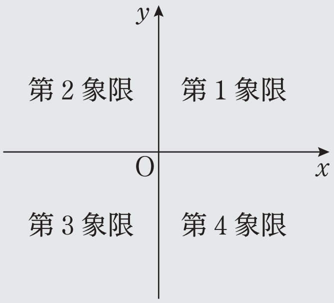
(2) 次の1次関数のグラフをかき，値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

(i) $y=-3x+1\quad(-1\leqq x\leqq 1)$　(ii) $y=\dfrac{1}{2}x-3\quad(2\leqq x<6)$

Point Pickup

座標平面と象限

座標平面は，座標軸によって4つの部分に分けられ，右図のように
「第1象限」「第2象限」「第3象限」「第4象限」
という。
※座標軸上の点は，どの象限にも含まれない。



1次関数の最大値，最小値

1次関数のグラフは直線である。傾きや切片に注目してグラフをかく。
定義域の端の点(端点)に注目し，端点がグラフに含まれる場合は，その点が最大または最小の候補となる(1次関数の場合は，最大または最小になる)。

第 7 講 PART2 確認問題

1 点 $(-2,\ 1)$ は第 ア 象限の点，

点 $(3,\ -4)$ は第 イ 象限の点である。

点 $(1,\ 6)$ は第 ウ 象限の点，

点 $(-5,\ -3)$ は第 エ 象限の点である。

2 1 次関数 $y=-2x+5\ (-2\leqq x\leqq 1)$ において，

この関数の値域は，オ $\leqq y\leqq$ カ であり，最大値は

キ，最小値は ク である。

3 1 次関数 $y=\dfrac{1}{3}x+2\ (-3\leqq x<3)$ において，

この関数の値域は，ケ $\leqq y<$ コ であり，最大値は

サ，最小値は シ である。

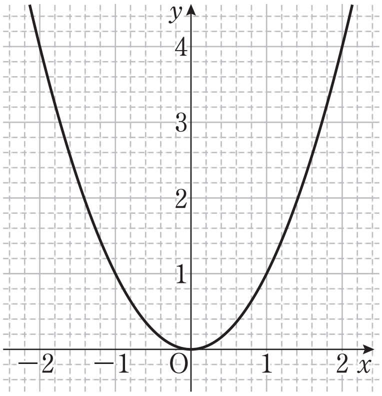
サ，シ は，次の①～④のうちから選べ。

① 1　　② 2

③ 3　　④ ない

PART3　$y=ax^2+q$ のグラフ，$y=a(x-p)^2$ のグラフ

要点 ①　$y=ax^2$ のグラフ



$y=x^2$，$y=-2x^2+3x-4$ のように，y が x を用いて

（a，b，c は定数，$a \neq 0$）

の形で表されるとき，y は x の「　　　　　」という。

2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を通り y 軸に関して対称な　　　　　である。例えば，2 次関数 $y=x^2$ のグラフは，右図のような放物線である。

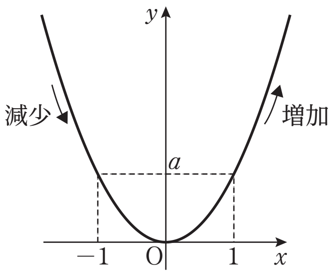
放物線の対称の軸を，単に「　　」という。また，軸と放物線の交点を「　　　」という。2 次関数 $y=ax^2$ のグラフの軸は　　　，頂点は点　　　である。

また，2 次関数 $y=ax^2$ のグラフは，その放物線の形から

$a>0$ のとき「　　　　　」　$a<0$ のとき「　　　　　」

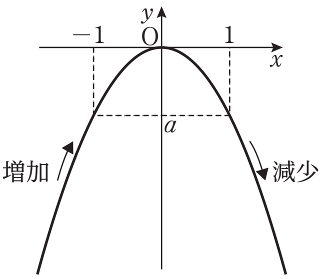
であるという。

$a>0$



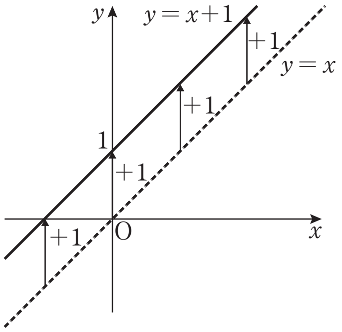
下に凸

$a<0$



上に凸

要点 ②　平行移動と $y=ax^2+q$ のグラフ



「　　　　　」… 平面上で，図形上の各点を一定の向きに一定の距離だけ移動させること。移動によって図形の形や向きは変わらない。

「　　　　　」… x 軸の正の向き

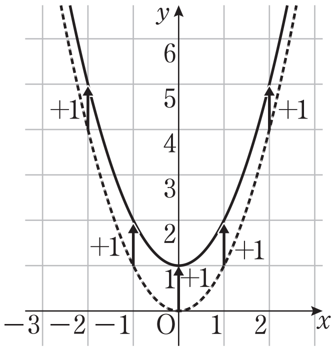
「　　　　　」… y 軸の正の向き

例　$y=x+1$ のグラフは，$y=x$ のグラフを　　　　　に　だけ　　　　　した直線である。

x の各値において，$y=x^2+1$ の y の値は，$y=x^2$ より 1 だけ大きい。

よって，$y=x^2+1$ のグラフは，$y=x^2$ のグラフを　　　　に　だけ　　　　　した放物線である。また，グラフの軸は　　　，頂点は点　　　である。

一般に，次のことがいえる。



2 次関数 $y=ax^2+q$ のグラフ

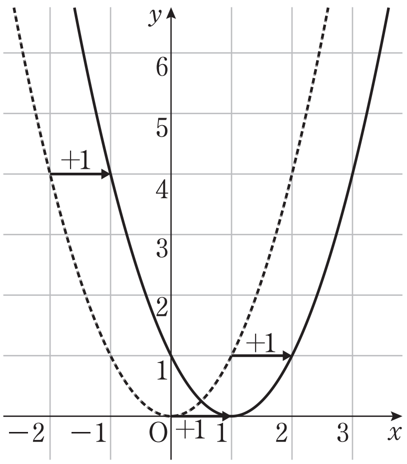
2 次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動した放物線であり，グラフの軸は y 軸，頂点は点 $(0,\ q)$ である。

要点 ③ $y=a(x-p)^2$ のグラフ

$y=(x-1)^2$ のグラフについて考える。$y=(x-1)^2$ は，$y=x^2$ の x を $x-1$ におき換えた式である。ここで，x の各値に対する関数 $y=x^2$，$y=(x-1)^2$ の値を比べる。

x	…	-2	-1	0	1	2	…
x^2	…	4	1	0	1	4	…
$(x-1)^2$	…	9	4	1	0	1	…

この表により，同じ y の値をとる x が，　だけ　　に　ずれていることがわかる。これは他の x の値でも同様である。



よって，$y=(x-1)^2$ のグラフは，$y=x^2$ のグラフを　　　　に　だけ　　　　　した放物線である。また，グラフの軸は　　　　　，頂点は点　　　である。

一般に，次のことがいえる。

2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフ

2 次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した放物線であり，グラフの軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$ である。

3 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^2+2$　　(2)　$y=2x^2-3$

(3)　$y=(x-1)^2$　　(4)　$y=-2(x+1)^2$

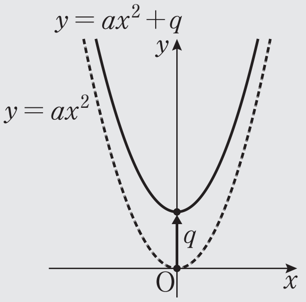
Point Pickup

$y=ax^2+q$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動した放物線。

軸は y 軸

頂点は 点 $(0,\ q)$

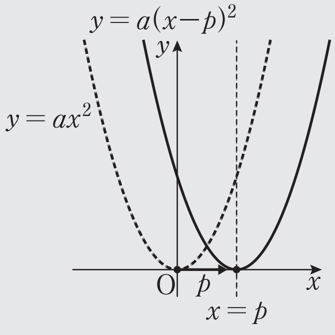


$y=a(x-p)^2$ のグラフ

2次関数 $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動した放物線。

軸は 直線 $x=p$

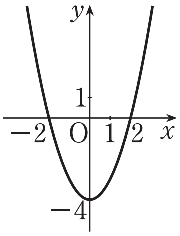
頂点は 点 $(p,\ 0)$

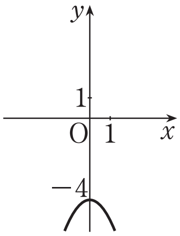


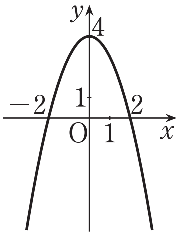
第 7 講　PART3 確認問題

1　$y=-x^2+4$ のグラフの軸は直線 $x=$ ア，頂点は点（ イ ， ウ ）である。

また，グラフを次の①〜③のうちから選べ。 エ

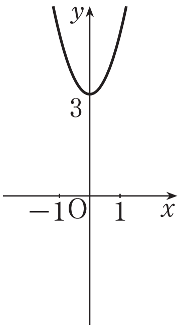
①


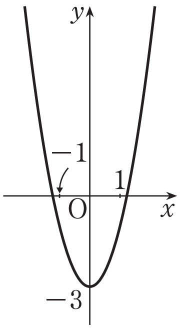
②


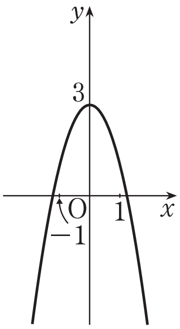
③


2　$y=2x^2-3$ のグラフの軸は直線 $x=$ オ，頂点は点（ カ ， キク ）である。

また，グラフを次の①〜③のうちから選べ。 ケ

①


②


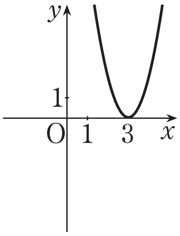
③


3 $y=2(x-3)^2$ のグラフの軸は直線 $x=$ [コ]，頂点は点

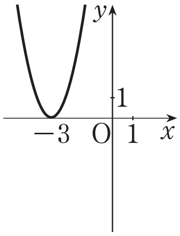
([サ], [シ]) である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。[ス]

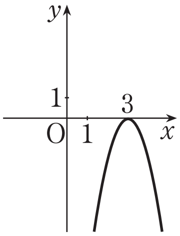
①



②



③

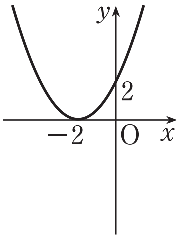


4 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ のグラフの軸は直線 $x=$ [セソ]，頂点は

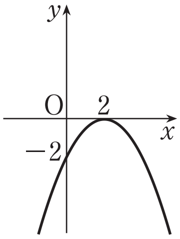
点 ([タチ], [ツ]) である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。[テ]

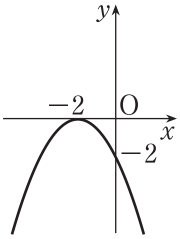
①



②



③



[MEMO]

PART4　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

要点①　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

3つの2次関数 $y=2x^2$ ……①，$y=2(x-2)^2$ ……②，$y=2(x-2)^2+1$ ……③

のグラフについて，②のグラフは，①のグラフを

　軸方向に　だけ平行移動したものである。

さらに，③のグラフは，②のグラフを　軸方向に

　だけ平行移動したものである。

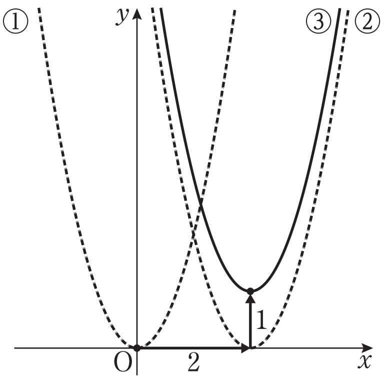
よって，$y=2(x-2)^2+1$ のグラフは $y=2x^2$

のグラフを

　　　　軸方向に　，　軸方向に

だけ平行移動したものである。

一般に，次のことがいえる。



2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

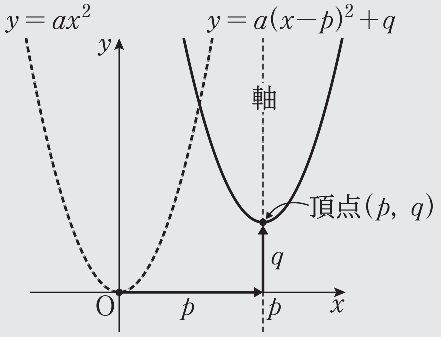
2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，

$y=ax^2$ のグラフを

　x 軸方向に p，y 軸方向に q

だけ平行移動した放物線。

　軸は 直線 $x=p$，頂点は 点 $(p,\ q)$



例　2次関数 $y=(x+1)^2-3$ のグラフは，

$y=x^2$ のグラフを

　　　x 軸方向に　　，y 軸方向に

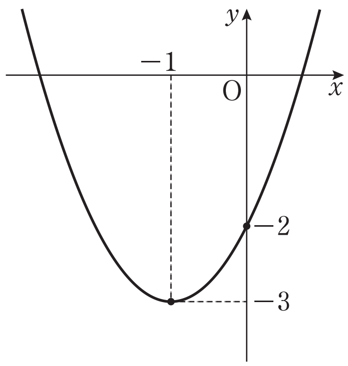
だけ平行移動した，　に凸の放物線である。

　　　軸は直線

　　　頂点は点

であり，点 $(0,\quad)$ を通る。

よって，$y=(x+1)^2-3$ のグラフは右図。



[MEMO]

4 次の２次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-1)^2+2$　　(2)　$y=2(x+3)^2-1$

(3)　$y=-(x-2)^2-1$　　(4)　$y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+5$

Point Pickup

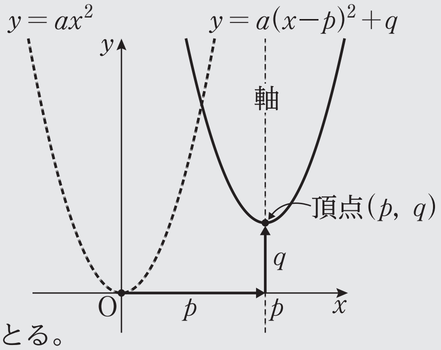
$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

２次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフは

$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ

平行移動した放物線。

軸は 直線 $x=p$，頂点は 点 $(p,\ q)$



<$y=a(x-p)^2+q$ のグラフのかき方>

① 座標平面上に，頂点をとる。

② $x=0$ のときの y の値を求め，y 軸との交点をとる。

③ グラフの凸方向に注意してグラフをかく。

$a>0$ のとき グラフは　　に凸　　　$a<0$ のとき グラフは　　に凸

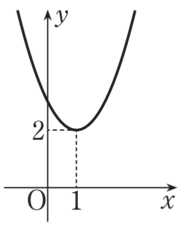
④ 頂点の座標や y 軸との交点の y 座標をかき入れる。

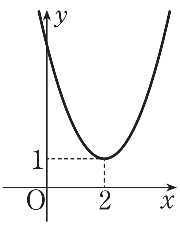
第 7 講　PART4 確認問題

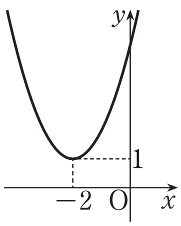
1　$y=(x-2)^2+1$ のグラフの頂点は

点（ ア ， イ ）である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 ウ

①


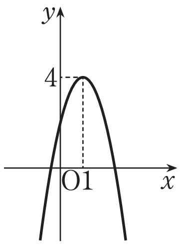
②


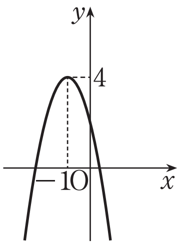
③


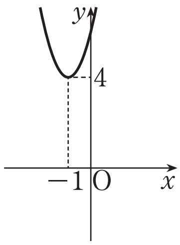
2　$y=-2(x+1)^2+4$ のグラフの頂点は

点（ エオ ， カ ）である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 キ

①


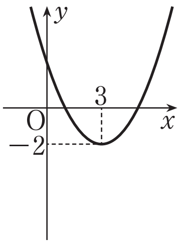
②


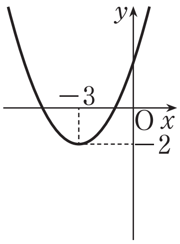
③


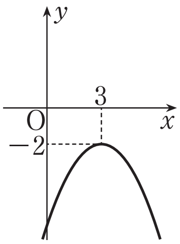
3　$y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$ のグラフの頂点は

点（ ク ， ケコ ）である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 サ

①


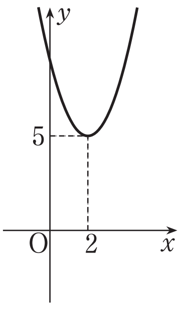
②


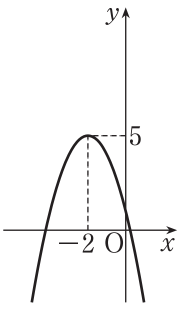
③


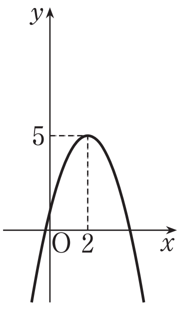
4　$y=-(x-2)^2+5$ のグラフの頂点は，

点（ シ ， ス ）である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 セ

①


②


③


[MEMO]

PART5 平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

要点① x^2+bx+c の平方完成

$y=ax^2+bx+c$ の形を2次関数の「一般形」，$y=a(x-p)^2+q$ の形を2次関数の「標準形」という。一般形 $y=ax^2+bx+c$ で表された2次関数のグラフをかくためには，この式を標準形 $y=a(x-p)^2+q$ に変形すればよい。

2次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを「　　　　　　」する，という。

例 x^2-6x を平方完成する。

$x^2-6x\quad=(x-\quad)^2$ より

$x^2-6x\quad=(x-3)^2$

x^2-6x
↓半分
$=(x-3)^2-3^2$
↑その2乗を引く

x^2 の係数が1の2次関数 $y=x^2+bx+c$ について

$$y=x^2+bx+c=\left(x+\quad\right)^2\qquad+c$$

と平方完成することにより，グラフの軸，頂点を求め，グラフをかくことができる。

例 $y=x^2+5x+2$ のグラフをかく

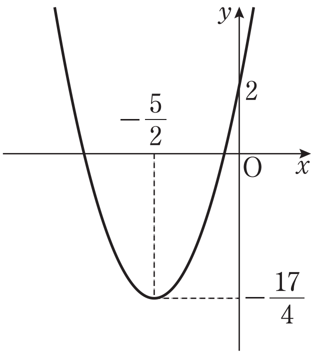
$y=x^2+5x+2$

$=\left(x+\quad\right)^2$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

軸は直線　　　　　頂点は点



要点② ax^2+bx+c の平方完成

x^2 の係数が1ではない2次関数，すなわち $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）の平方完成は，定数項 c 以外の項を　　　　　　　　ことで，x^2 の係数が1のときの平方完成と同じ変形を行うことができる。

例　$2x^2-4x+3$ を平方完成する。

$2x^2-4x+3=$　　　　　　$+3$

$=2\ (x\quad)^2\qquad+3$

$=2(x-1)^2-\quad 1+3$

$=2(x-1)^2+1$

2次関数 $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）について

$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\qquad\right)+c$

$=a\left(x+\qquad\right)^2\qquad\qquad+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

と平方完成することができる。よって，次のことが成り立つ。

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で

軸は 直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　　頂点は 点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

5　次の２次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-6x-1$

(2)　$y=x^2+4x+5$

(3)　$y=2x^2+4x-5$

(4)　$y=-x^2-8x$

(5)　$y=-3x^2+3x+2$

(6)　$y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$

Point Pickup

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

ax^2+bx+c を「　　　　　　　」し，$y=a(x-p)^2+q$ の形にする。手順は以下。

①　定数項 c 以外の項を，x^2 の係数 a でくくる。

②　(　　) の中の２次式を，以下の変形を用いて平方完成する。

$$a(x^2+\bullet x)=a\left\{\left(x+\quad\right)^2-\left(\quad\right)^2\right\}$$

　このとき，外側の (　　) は {　　} となる。

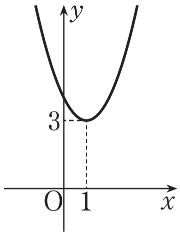
③　{　　} の前の数 a を {　　} の中に分配し，{　　} をはずす。

④　整理して $y=a(x-p)^2+q$ の形にする。

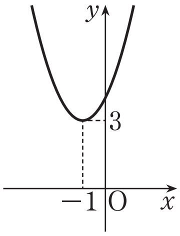
第 7 講　PART5 確認問題

1　$y=x^2+2x+4$ のグラフの頂点は，点（ アイ ， ウ ）である。また，グラフを次の①〜③のうちから選べ。 エ

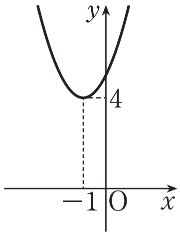
①



②

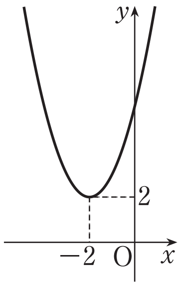


③

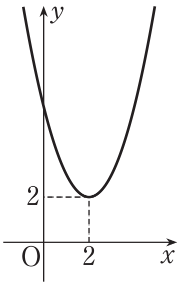


2　$y=x^2-4x+6$ のグラフの頂点は点（ オ ， カ ）である。また，グラフを次の①〜③のうちから選べ。 キ

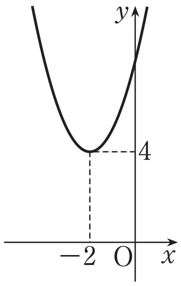
①



②

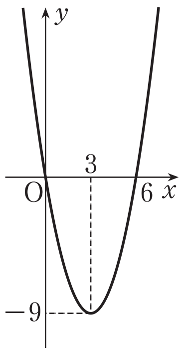


③

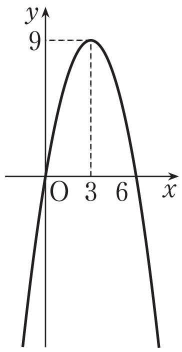


3　$y=-x^2+6x$ のグラフの頂点は点（ ク ， ケ ）である。また，グラフを次の①〜③のうちから選べ。 コ

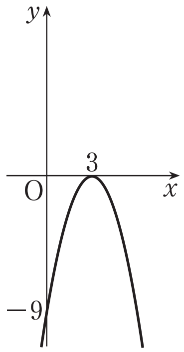
①



②



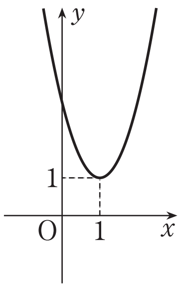
③



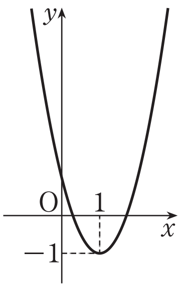
4 $y=2x^2-4x+3$ のグラフの頂点は点 (サ , シ) である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 ス

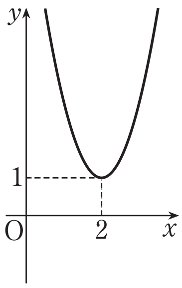
①



②

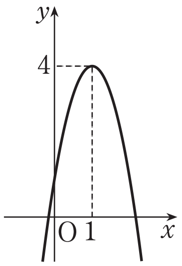


③

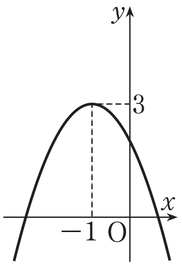


5 $y=-3x^2-6x+1$ のグラフの頂点は点 (セソ , タ) である。また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 チ

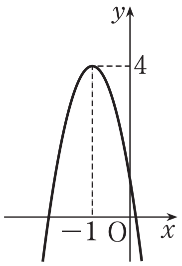
①



②

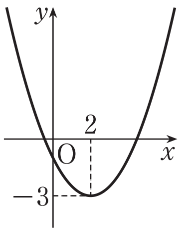


③

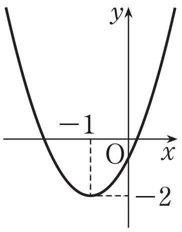


6 $y=\frac{1}{2}x^2+2x-1$ のグラフの頂点は点 (ツテ , トナ) である。また，グラフを次の①～③のうちから選べ。 ニ

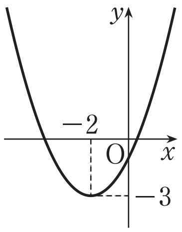
①



②



③



【MEMO】

PART6 放物線の平行移動

要点① 放物線の平行移動

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを，放物線 $y=ax^2+bx+c$ ということがある。また，$y=ax^2+bx+c$ を放物線の方程式という。

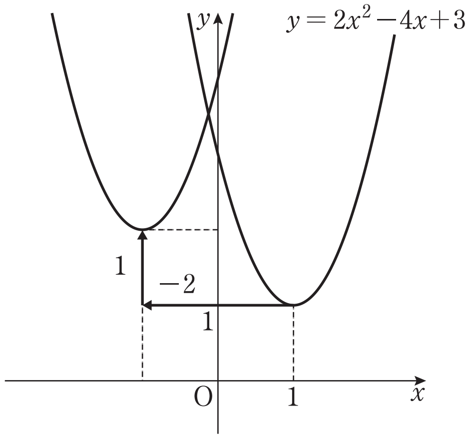
放物線 $y=ax^2+bx+c$，$y=ax^2+b'x+c'$ は，ともに放物線 $y=ax^2$ を平行移動したものである。したがって，以下のことがいえる。

放物線の平行移動

x^2 の係数が同じ2つの放物線 $y=ax^2+bx+c$，$y=ax^2+b'x+c'$ は，一方を平行移動すると，もう一方に重ねることができる。

例 放物線 $y=2x^2-4x+3$ を，x 軸方向に -2，y 軸方向に1だけ平行移動した放物線の方程式を求める。

$$y=2x^2-4x+3$$
$$=2(x^2-2x)+3$$
$$=2\{(x-1)^2-1\}+3$$
$$=2(x-1)^2+1$$



よって，この放物線の頂点は点 $(1,\ 1)$

この放物線を，x 軸方向に -2，y 軸方向に1だけ平行移動すると，その頂点は点 (　，　) に移動する。

また，平行移動しても x^2 の係数は変わらない。

よって，求める放物線の方程式は

$$y=\quad(x\quad)^2$$

例 放物線 $y=-x^2-4x-2$ ……① を平行移動して放物線 $y=-x^2+2x-2$ ……② に重ねるには，どのように平行移動すればよいか求める。

①を変形すると

$$y=-x^2-4x-2$$

$=-(x^2+4x)-2$

$=-\{(x+2)^2-4\}-2$

$=-(x+2)^2+2$

①の頂点は 点 $(-2,\ 2)$

②を変形すると

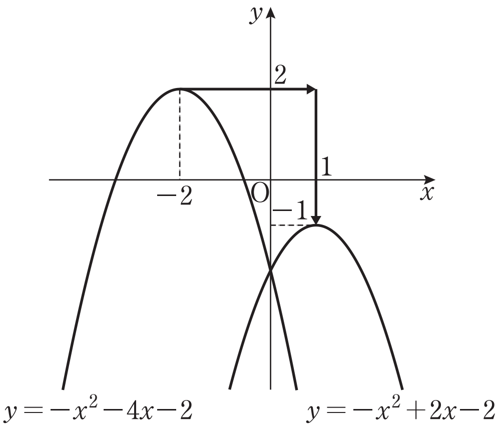
$y=-x^2+2x-2$

$=-(x^2-2x)-2$

$=-\{(x-1)^2-1\}-2$

$=-(x-1)^2-1$

②の頂点は点 $(1,\ -1)$



よって，点 $(-2,\ 2)$ が，点 $(1,\ -1)$ に重なるように平行移動すればよい。

したがって，①のグラフを

x 軸方向に　，y 軸方向に

だけ平行移動すれば，②のグラフに重なる。

6　(1)　放物線 $y=2x^2-8x+5$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+3$ を平行移動して放物線 $y=x^2+6x+3$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

Point Pickup

放物線の平行移動

放物線の平行移動は，「　　　　」の移動に注目する。

平行移動しても，x^2 の係数は変わらない。

第 7 講　PART6 確認問題

1　放物線 $y=-x^2+4x-3$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，放物線

$y=$ [ア] x^2+ [イ] $x-$ [ウエ] に重なる。

2　放物線 $y=x^2+2x+3$ を x 軸方向に [オ]，y 軸方向に [カ] だけ平行移動すると，放物線 $y=x^2-4x+7$ に重なる。

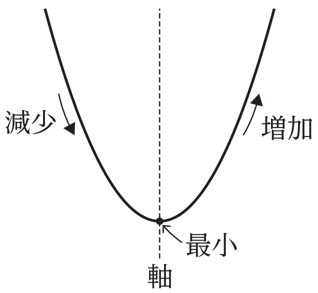
第 8 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2 次関数の最大・最小

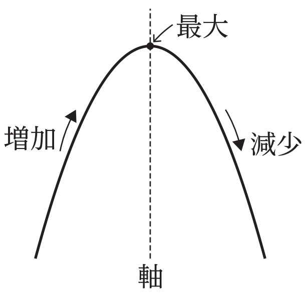
要点 ①　2 次関数の最大・最小

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフを利用すると，関数の値の変化を捉えることができる。

$a>0$



$a<0$



2 次関数の最大値，最小値について，一般に次のことがいえる。

2 次関数の最大・最小

2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$ は

$a>0$ のとき　$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない

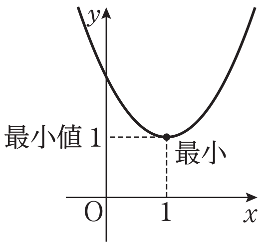
$a<0$ のとき　$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない

例　2 次関数 $y=(x-1)^2+1$ について

この関数のグラフは，頂点が点 $(1,\ 1)$ の下に凸の放物線である。よって

$x=$ 　のとき 最小値　をとる。

最大値は　　　。

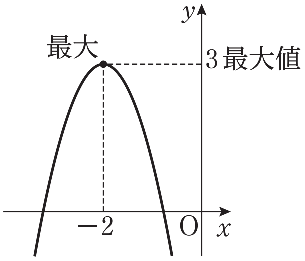


2 次関数 $y=-2(x+2)^2+3$ について

この関数のグラフは，頂点が点 $(-2,\ 3)$ の上に凸の放物線である。よって

$x=$ 　　のとき 最大値　をとる。

最小値は　　　。



[MEMO]

1 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=(x-2)^2+3$　　(2) $y=-(x+3)^2-1$

(3) $y=3x^2-6x-1$　　(4) $y=-2x^2-2x$

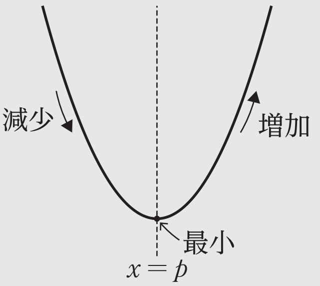
Point Pickup

2 次関数の最大・最小

標準形 $y=a(x-p)^2+q$ に変形し，値の増減をグラフで調べる。

$a>0$ のとき

グラフは　　　　　の放物線

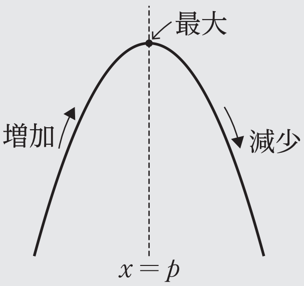


$x=p$ で　　　　　q をとる

　　　　はない

$a<0$ のとき

グラフは　　　　　の放物線



$x=p$ で　　　　　q をとる

　　　　はない

第 8 講　PART1 確認問題

次の 2 次関数に最大値，最小値があればそれを求めよ。ただし，
それぞれ①～⑤のうちから選べ。

1　$y=(x-1)^2+2$

最大値 ア，最小値 イ

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ ない

2　$y=-(x+3)^2+4$

最大値 ウ，最小値 エ

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ ない

3　$y=2x^2-8x+9$

最大値 オ，最小値 カ

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ ない

4　$y=-x^2+6x-5$

最大値 キ，最小値 ク

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ ない

PART2 定義域が限られた 2 次関数の最大・最小

要点 ① 定義域に制限がある 2 次関数の最大・最小

定義域に制限がある場合の 2 次関数の最大値，最小値については，グラフを利用して定義域に対する値域を求め，最大値，最小値を求める。

例 2 次関数 $y=x^2-2x-1$ ($-1\leqq x\leqq 2$) の最大値，最小値を求める。

$y=(x-1)^2-2$

$x=-1$ のとき $y=$

$x=2$ のとき　$y=$

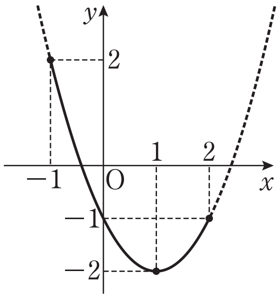
よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=$　　で最大値

$x=$　で最小値

をとる。



例 2 次関数 $y=-x^2+4x-5$ ($3\leqq x\leqq 5$) の最大値，最小値を求める。

$y=-(x-2)^2-1$

$x=3$ のとき $y=$

$x=5$ のとき $y=$

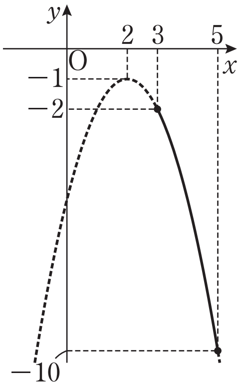
よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=$　で最大値

$x=$　で最小値

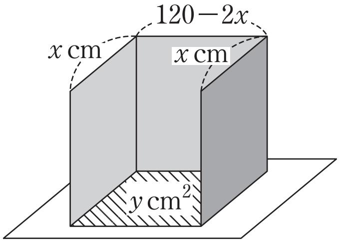
をとる。



要点 ② 2 次関数の最大・最小の利用

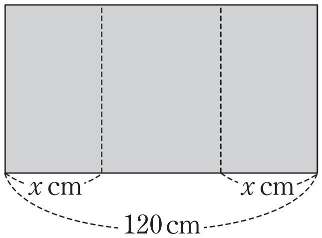
2 次関数を利用して，身近な問題を解決する。

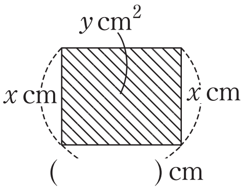
例 横幅 120 cm のダンボールを，右図のように両端から等しい長さだけ 90° に折り曲げ，パーティション(仕切り)を作る。このとき，仕切られたスペース(右図の斜線部分)の面積を最大にするためには，両端から何 cm のところで折り曲げればよいかを求めたい。



折り曲げる長さを x cm とすると，

横幅は (　　　　)cm となる。





x 　　，$120-2x$ 　　より

$0<x<60$ ……①

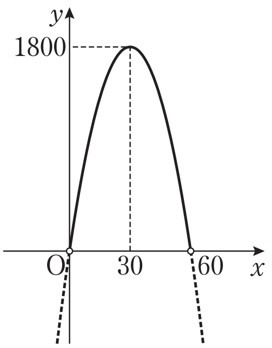
スペースの面積を y cm² とすると

$$\begin{aligned} y &= x(120-2x) \\ &= -2x^2+120x \\ &= -2(x-30)^2+1800 \end{aligned}$$

①の範囲におけるこの関数のグラフは，右図実線部分。よって，y は $x=30$ のとき最大値 1800 をとる。

したがって，両端から 30 cm のところで折り曲げればよい。

また，このときのスペースの面積は 1800 cm² である。



2 (1) 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(i) $y=x^2\ (-1 \leqq x \leqq 3)$　(ii) $y=-\frac{1}{2}x^2+2\ (-2 < x \leqq 1)$

(iii) $y=x^2-4x-2\ (0 \leqq x \leqq 4)$　(iv) $y=-x^2+6x+2\ (4 \leqq x \leqq 5)$

(2) ある商品を 150 円で売ると 1 日平均で 1000 個売れ，180 円で売ると 1 日平均で 880 個売れる見込みである。

(i) この商品を 150 円, 180 円のどちらの価格で売った方が 1 日平均の売上高が大きいか。

(ii) この商品の売価と 1 日平均の売れる個数が比例関係にあると仮定すると，この商品を 1 円値上げすると，売り上げ個数は 1 日平均で 4 個減少すると予想される。この予想をもとに，この商品の売価をいくらにすると，1 日平均の売上高が最大になるかを求めよ。

Point Pickup

定義域に制限がある 2 次関数の最大・最小

定義域に制限がある場合の 2 次関数の最大値，最小値は

グラフの軸における y の値(頂点の y 座標)と，定義域の端における y の値を比較して求める。主な手順は以下。

① 平方完成し，グラフを　　　でかく。

② ①のグラフにおいて，与えられた定義域に相当する部分を　　　にする。

定義域の端の点(端点)が含まれない場合は，点を「○」とする。

③ 頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

第 8 講　PART2 確認問題

1　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=x^2\quad(-2\leqq x\leqq 1)$

最大値 [ア]，最小値 [イ]

2　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=-2x^2+10\quad(1\leqq x\leqq 2)$

最大値 [ウ]，最小値 [エ]

3　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=x^2-2x+5\quad(0\leqq x\leqq 3)$

最大値 [オ]，最小値 [カ]

4　次の 2 次関数の最大値，最小値を求めよ。

$y=-x^2+4x+6\quad(-1\leqq x\leqq 1)$

最大値 [キ]，最小値 [ク]

5 ある店の商品Ａは，売り値が60円のときは１日に400個売れる。また，売り値を60円から１円値上げするごとに，１日に売れる個数が５個ずつ減少するという。
商品Ａの売り値は60円以上として，いくらのときに１日の売り上げ高が最大になるかを求める。

売り値を60円から x 円値上げしたときの１日の売り上げ高を y 円とする。

１日に売れる個数は $\left(400-\boxed{\text{ケ}}x\right)$ 個だから，

$x \geqq 0$，$400-\boxed{\text{ケ}}x \geqq 0$ より，

$$0 \leqq x \leqq \boxed{\text{コサ}} \quad \cdots\cdots ①$$

y は，

$$y=(60+x)\left(400-\boxed{\text{ケ}}x\right)$$
$$=-\boxed{\text{シ}}\left(x^2-\boxed{\text{スセ}}x-4800\right)$$

であり，①の範囲で y は $x=\boxed{\text{ソタ}}$ のとき最大となる。

よって，商品Ａの売り値を $\boxed{\text{チツ}}$ 円にしたときに売り上げ高が最大となる。

【MEMO】

PART3　2 次関数の決定

要点 ①　頂点や軸に関する条件から 2 次関数の決定

頂点の座標や軸の方程式が条件として与えられたときは，求める 2 次関数の式を標準形

$$y=a(x-p)^2+q$$

で表し，与えられた条件を用いて式を立てることができる。

例　頂点が点 (1，2) であり，点 (3，10) を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求める。

頂点が点 (1，2) であることより，求める 2 次関数は

$$y= \quad (x \quad)^2+$$

と表すことができる。

グラフが点 (3，10) を通るから

$$\quad =a(\quad -1)^2+2 \qquad 4a=8 \qquad a=2$$

よって，求める 2 次関数は　$y= \quad (x-1)^2+2$

例　軸が直線 $x=-2$ で，2 点 (1，−6)，(−4，−1) を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求める。

軸が直線 $x=-2$ であることより，求める 2 次関数は

$$y= \quad (x \quad)^2+$$

と表すことができる。

グラフが点 (1，−6)，(−4，−1) を通るから

$$\begin{cases} \quad = \quad a+q & \cdots\cdots ① \\ \quad = \quad a+q & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ②より　$-5=5a$ 　　$a=-1$

②に代入して　$-1=-4+q$ 　　$q=3$

よって，求める 2 次関数は　$y= \quad (x+2)^2+$

要点②　グラフが通る３点から２次関数の決定

グラフが通る３点の座標が条件として与えられたときは，求める２次関数の式を一般形

$$y=ax^2+bx+c$$

で表し，与えられた点の座標を用いて式を立てることができる。

例　３点 $(1,\ 4)$，$(-1,\ -4)$，$(2,\ 2)$ を通る放物線をグラフにもつ２次関数を求める。

求める２次関数を

$$y=ax^2+bx+c$$

とおく。この関数のグラフが３点 $(1,\ 4)$，$(-1,\ -4)$，$(2,\ 2)$ を通るから

$$\begin{cases} 4=a+b+c & \cdots\cdots① \\ -4=a-b+c & \cdots\cdots② \\ 2=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①−②より　$2b=8$　　$b=4$　……④

④を①に代入して整理すると $a+c=0$　……⑤

④を③に代入して整理すると $4a+c=-6$　……⑥

⑤，⑥より $a=-2$，$c=2$

よって，求める２次関数は $y=\quad x^2+\quad x+$

上記の①，②，③のような，３つの文字を含む１次方程式を連立した方程式を，連立３元１次方程式という。連立３元１次方程式を解くには，１文字を消去し，残りの２文字についての連立方程式を解く，が基本である。

$$\begin{cases} 4=a+b+c & \cdots\cdots① \\ -4=a-b+c & \cdots\cdots② \\ 2=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③−①より $3a+b=-2$　……⑦

③−②より $3a+3b=6$　　よって　$a+b=2$　……⑧

⑦，⑧より $a=-2$，$b=4$

これらを①に代入して $-2+4+c=4$　　$c=2$

3 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (2, 5) で，点 (1, 6) を通る。

(2) 軸の方程式が $x=-1$ で，2 点 (1, −9)，(0, −3) を通る。

(3) 3 点 (1, 6)，(−1, 2)，(−2, 9) を通る。

Point Pickup

2 次関数の決定（頂点や軸から）

頂点が点 (●, ■)，軸の方程式が $x=$● である放物線をグラフにもつ 2 次関数は

$$y=\quad(x-\quad)^2+$$

と表される。

2 次関数の決定（通る 3 点から）

求める 2 次関数の式を $y=\quad x^2+\quad x+$ とおき，グラフが通る 3 点の座標を用いて 3 つの 1 次方程式をつくり，それらを連立方程式として解く。

3 つの式から 1 文字を消去し，残りの 2 文字についての連立方程式として解く，が基本方針となる。

第 8 講　PART3 確認問題

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

1　頂点が点(2，1)で，点(3，0)を通る。

$y=$ ア x^2+ イ $x-$ ウ

2　軸の方程式が $x=1$ で，2 点(0，1)，(3，7)を通る。

$y=$ エ x^2- オ $x+$ カ

3　3 点(0，3)，(1，1)，(−1，9)を通る。

$y=$ キ x^2- ク $x+$ ケ

第 9 講　2次方程式

PART1　2次方程式の解法

要点① 2次方程式と因数分解による解法，平方根による解法

$2x^2=7x+4$，$x^2=9$ のように，等式のすべての項を移項すると

（a，b，c は定数，$a \neq 0$）

の形で表される方程式を，x の2次方程式という。

方程式の　　　　　　　　を求めることを，方程式を　　　という。

2次方程式を因数分解を使って解く。その際に用いるのは，次の性質である。

> 2つの数 A，B について
>
> 「$A\times B=0$」　ならば　「$A=0$　または　$B=0$」

例　2次方程式 $2x^2-3x-2=0$ を解く。

左辺を因数分解すると

よって，　　$=0$　または　　$=0$

したがって，この2次方程式の解は $x=-\dfrac{1}{2}$，2

次に，2次方程式を平方根の考え方を使って解く。

例　2次方程式 $x^2-2=0$ を解く。

$x^2=2$ より，x は2乗すると2になる数，すなわち，2の平方根である。

したがって，この2次方程式の解は　$x=$

要点② 解の公式による解法

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の　　　　　　は次のようになる。

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき　　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（証明）

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$　…①について，①の左辺を「　　　　　　　」すると

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\qquad\right)+c=a\left(x+\qquad\right)^2\qquad\qquad+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

となる。よって，①は

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \qquad \text{すなわち} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

と変形できる。よって，　　　　　$\geqq 0$ のとき

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad \text{すなわち} \qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって，①の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2 次方程式の解の公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ において，$b=2b'$ とおくと

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{\quad b'^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{\quad(b'^2-ac)}}{2a}=\frac{-2b'\pm\quad\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

よって，次の公式が得られる。

> 2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は
>
> $b'^2-ac\geqq 0$ のとき　　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

例　2 次方程式 $5x^2-6x-1=0$ の解は

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot5\cdot(-1)}}{2\cdot5}=\frac{6\pm\sqrt{56}}{10}=\frac{6\pm2\sqrt{14}}{10}=\frac{3\pm\sqrt{14}}{5}$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-5\cdot(-1)}}{5}=\frac{3\pm\sqrt{14}}{5}$$

1 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2-5x-36=0$　(2) $x^2+12x+36=0$　(3) $3x^2-7x-6=0$

(4) $x^2-12=0$　(5) $2x^2-5x+1=0$　(6) $x^2+2x-1=0$

Point Pickup

2次方程式の解法

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解法は以下の通り

① **左辺の「　　　　　　」を考える。**

② **$ax^2+c=0$（x の係数が0）の形のときは，「　　　　　　」の利用を考える。**

③ **「　　　　　　」の利用。**

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

特に　$b=2b'$　かつ　$b'^2-ac \geqq 0$　のときは　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

第 9 講　PART1 確認問題

次の 2 次方程式を解け。

1　$x^2+3x-10=0$

$x=$ アイ , ウ

2　$x^2-10x+25=0$

$x=$ エ

3　$2x^2+5x-3=0$

$x=$ オカ , $\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$

4　$x^2-18=0$

$x=\pm$ ケ $\sqrt{\text{コ}}$

5　$3x^2-7x+1=0$

$x=\dfrac{\text{サ}\pm\sqrt{\text{シス}}}{\text{セ}}$

6　$x^2+6x-2=0$

$x=$ ソタ $\pm\sqrt{\text{チツ}}$

PART2　2次方程式の実数解の個数

要点 ①　2次方程式の実数解の個数

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ……①の解の公式は以下である。

$\geqq 0$ のとき　　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$b^2-4ac>0$ のとき

①は2つの異なる実数の解 $x=\dfrac{-b\quad\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $\dfrac{-b\quad\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ。

方程式の実数の解を，単に「　　　　　」という。

$b^2-4ac=0$ のとき

①は，ただ1つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\quad}}{2a}=$ 　　　をもつ。

2つの解が重なったものと考えて，この実数解を「　　　」という。

$b^2-4ac<0$ のとき

①は実数解をもたない。

b^2-4ac を，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「　　　　　」といい，「　」で表す。2次方程式の実数解の個数と判別式 $D=b^2-4ac$ について，次のことが成り立つ。

2次方程式の実数解の個数

2次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の判別式　$D=b^2-4ac$　について

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる2つの実数解をもつ

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　ただ1つの実数解(重解)をもつ

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

例　2次方程式 $x^2+7x+5=0$ の判別式を D とすると

$D=$ 　　　　　 $=29$

よって，この2次方程式の実数解の個数は　個である。

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると

$D=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$

より，D の正負は b'^2-ac，すなわち　　の正負と一致する。

したがって，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ においては，D の代わりに

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

を用いてもよい。

例　2 次方程式 $2x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}= \qquad\qquad =-5$$

よって，この 2 次方程式の実数解の個数は　個である。

要点 ②　2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつのは，この方程式の判別式を D とすると

・異なる 2 つの実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　D

・ただ 1 つの実数解(重解)をもつ　$\Longleftrightarrow$　D

の 2 つの場合である。よって，次のことが成り立つ。

2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D\geqq 0$

例　2 次方程式 $2x^2+x+k=0$ が実数解をもつときの定数 k の値の範囲を求める。

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot 2\cdot k=1-8k$$

2 次方程式が実数解をもつのは D　　のときであるから

$$1-8k\geqq 0$$

よって，$k\leqq\frac{1}{8}$

2　(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(i)　$x^2+4x+1=0$　　(ii)　$x^2-3x+3=0$　　(iii)　$9x^2+6x+1=0$

(2)　2 次方程式 $3x^2+4x+m=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2 次方程式の実数解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると $D=b^2-4ac$

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　ただ 1 つの実数解(重解)をもつ

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　実数解をもたない

特に $b=2b'$ のときは，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

2 次方程式が実数解をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

実数解をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D\geqq 0$

第 9 講　PART2 確認問題

1　2 次方程式 $x^2+5x+2=0$ の実数解の個数は [ア] 個である。

2　2 次方程式 $2x^2-3x+4=0$ の実数解の個数は [イ] 個である。

3　2 次方程式 $4x^2+4x+1=0$ の実数解の個数は [ウ] 個である。

4　2 次方程式 $2x^2+3x+m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を次の①～④のうちから選べ。

[エ]

① $m>\dfrac{9}{2}$　　② $m<\dfrac{9}{2}$

③ $m>\dfrac{9}{8}$　　④ $m<\dfrac{9}{8}$

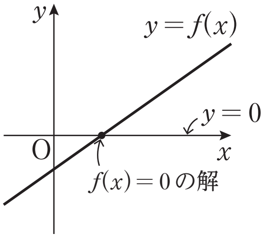
PART3　2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

要点① 関数のグラフと x 軸の共有点の座標

x 軸上の点は，その y 座標が　　である。よって，関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，その共有点の x 座標は，$y=f(x)$ で $y=0$ となる x の値，つまり方程式

$f(x)$

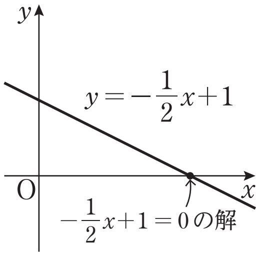
の解である。



例　$y=-\frac{1}{2}x+1$ のグラフと x 軸との共有点の座標を求める。

方程式 $-\frac{1}{2}x+1$　　　を解くと　$x=2$

よって，共有点の座標は



要点② 2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

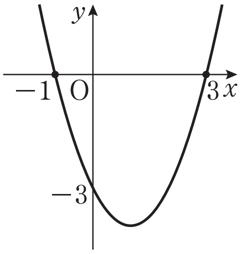
2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，その共有点の x 座標は，2次方程式 ax^2+bx+c　　　の　　　　　　である。

例　$y=x^2-2x-3$ のグラフと x 軸の共有点の座標を求める。

2次方程式 x^2-2x-3　　　を解くと

$(x+1)(x-3)=0$ より　$x=-1,\ 3$

よって，共有点の座標は

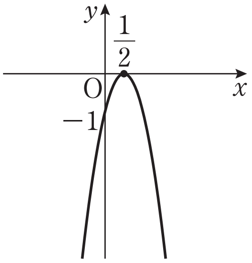


例　$y=-4x^2+4x-1$ のグラフと x 軸の共有点の座標を求める。

2次方程式 $-4x^2+4x-1$　　　を解くと

$4x^2-4x+1=0$ より　$(2x-1)^2=0$　$x=\frac{1}{2}$

よって，共有点の座標は



[MEMO]

3　次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+2x-8$　　(2)　$y=-x^2+6x+4$　　(3)　$y=2x^2+4x+2$

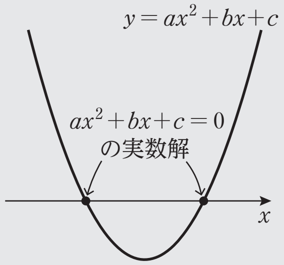
Point Pickup

2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の実数解である。



第 9 講 PART3 確認問題

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

1 $y=x^2+x-6$

$(\boxed{アイ},\ 0),\ (\boxed{ウ},\ 0)$

2 $y=-x^2+4x-1$

$(\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オ}},\ 0),\ (\boxed{エ}-\sqrt{\boxed{オ}},\ 0)$

3 $y=3x^2-6x+3$

$(\boxed{カ},\ 0)$

PART4　2次関数のグラフとx軸の位置関係

要点①　2次関数のグラフとx軸の位置関係

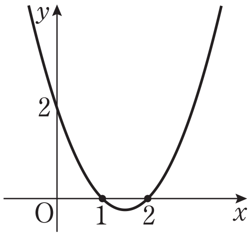
2次関数 $y=x^2-3x+2$ のグラフと x 軸の位置関係は，

右図のように「　　　　　　　　　　　　　」。

右図の2つの　　　　の x 座標は，2次方程式

x^2-3x+2

の「　　　　　　　　　　　　　　　」$x=1$，2である。



2次関数 $y=-x^2+6x-9$ のグラフと x 軸の位置関係は，

右図のように　　　　　　　をただ1つもつ。このとき，2次関数

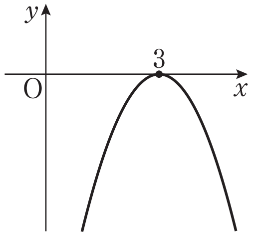
のグラフは，x 軸に「　　　　　　　」といい，その共有点を

「　　　　」という。

右図の接点の x 座標は，2次方程式

$-x^2+6x-9$

の「　　　　」$x=3$ である。



2次関数 $y=x^2+3x+4$ のグラフは，右図のように

x 軸と「　　　　　　　　　　　　　」。

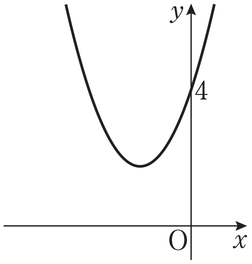
このとき，2次方程式 x^2+3x+4　　　を解の公式を

用いて解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$$

となり，根号の中，すなわち　　　　　　　が　　となる。

よって，この方程式は「　　　　　　　　　　　　　」。



以上より，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，グラフと x 軸の共有点の個数，すなわち2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数を調べることでわかり，その個数は，判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって決定する。よって，次のように整理される。

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
グラフと x 軸の共有点の個数	2個	1個	0個
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない

[MEMO]

4 (1) 次の2次関数のグラフと x 軸の位置関係を調べよ。

(i) $y=2x^2-5x+2$　　(ii) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$　　(iii) $y=x^2+6x+10$

(2) 2次関数 $y=x^2+2x+m$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べる。

$D \qquad \Longleftrightarrow$

$D \qquad \Longleftrightarrow$

$D \qquad \Longleftrightarrow$

$\big\}\ D \qquad \Longleftrightarrow$

第 9 講 PART4 確認問題

1 2 次関数 $y=x^2+3x+4$ のグラフと x 軸の位置関係は，

[ア]。

[ア] は，次の①～③のうちから選べ。

① 異なる 2 点で交わる ② 接する

③ 共有点をもたない

2 2 次関数 $y=x^2-x+\frac{1}{4}$ のグラフと x 軸の位置関係は，

[イ]。

[イ] は，次の①～③のうちから選べ。

① 異なる 2 点で交わる ② 接する

③ 共有点をもたない

3 2 次関数 $y=2x^2+3x+1$ のグラフと x 軸の位置関係は，

[ウ]。

[ウ] は，次の①～③のうちから選べ。

① 異なる 2 点で交わる ② 接する

③ 共有点をもたない

4 2 次関数 $y=2x^2-4x+m$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を次の①～④のうちから選べ。[エ]

① $m>1$ ② $m<1$

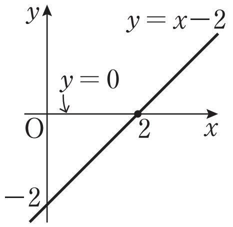
③ $m>2$ ④ $m<2$

第 10 講　2 次不等式

PART1　2 次不等式と 2 次関数のグラフ

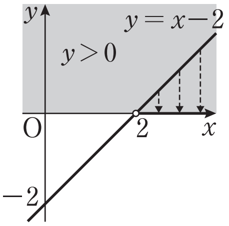
要点 ①　1 次不等式と 1 次関数のグラフ

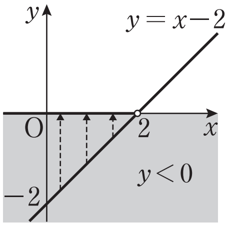
1 次不等式 $x-2>0$ の解は $x>2$ であり，1 次不等式 $x-2<0$ の解は $x<2$ である。これらの解を，1 次関数のグラフで考える。



1 次関数 $y=x-2$ のグラフは右図であり，このグラフと x 軸との交点の x 座標は，$y=0$ となる x の値，つまり方程式 $x-2=0$ の解 $x=2$ である。

1 次関数 $y=x-2$のグラフで x 軸より上側，すなわち　　　となる x の値の範囲は $x>2$ であり，これは 1 次不等式 $x-2>0$ の解である。





また，1 次関数 $y=x-2$ のグラフで x 軸より下側，すなわち　　　となる x の値の範囲は $x<2$ であり，これは 1 次不等式 $x-2<0$ の解である。

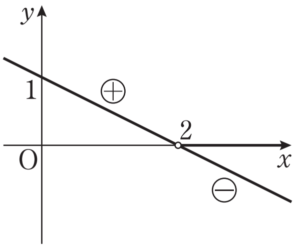
一般に，次のことが成り立つ。

> 不等式 $f(x)>0$ の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフで $y>0$ となる x 座標の範囲であり，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より上側にあるような x の値の範囲である。
> 不等式 $f(x)<0$ の解は，関数 $y=f(x)$ のグラフで $y<0$ となる x 座標の範囲であり，$y=f(x)$ のグラフが x 軸より下側にあるような x の値の範囲である。

例　1 次不等式 $-\frac{1}{2}x+1<0$ を，1 次関数のグラフを利用して解く。

$y=-\frac{1}{2}x+1$ のグラフは右図であり，このグラフと x 軸との交点の x 座標は $x=$

よって，求める不等式の解は



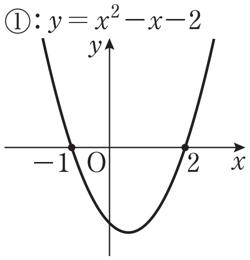
要点② 2次不等式の解（グラフが x 軸と2点で交わるとき）

$x^2-3x+2>0$，$3x^2+4x-1\leqq 0$ のように，不等式のすべての項を左辺に移項したとき，左辺が x の2次式になる不等式を，x についての「　　　　　　　　」という。

1次不等式を1次関数のグラフを用いて解くことができるのと同様，2次不等式についても，2次関数のグラフを用いて解くことができる。

ここでは，2次関数のグラフが x 軸と2点で交わる場合について考える。

例　2次不等式 $x^2-x-2>0$，$x^2-x-2\leqq 0$ を解く。

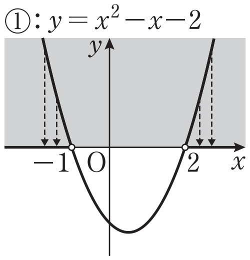


2次関数 $y=x^2-x-2$　……①のグラフと x 軸の交点の x 座標は，

2次方程式 x^2-x-2　　　の　　　　$x=-1$，2 である。

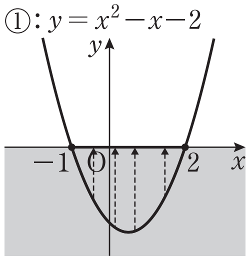
①のグラフは　　に凸の放物線であるから，グラフは右図。

2次不等式 $x^2-x-2>0$ の解は，①のグラフで y　　，すなわちグラフが x 軸より　　側にあるような x の範囲である。



よって，不等式 $x^2-x-2>0$ の解は

2次不等式 $x^2-x-2\leqq 0$ の解は，①のグラフで y　　，すなわちグラフが x 軸より　　側，または　　　　　にあるような x の範囲である。



よって，不等式 $x^2-x-2\leqq 0$ の解は

2次関数のグラフが x 軸と異なる2点で交わるときの2次不等式の解は以下となる。

2次不等式の解（グラフが x 軸と異なる2点で交わるとき）

2次関数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）のグラフが x 軸と異なる2点で交わるとき，

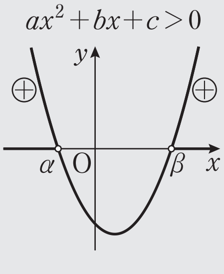
交点の x 座標を $x=\alpha$（アルファ），β（ベータ）（$\alpha<\beta$）とすると

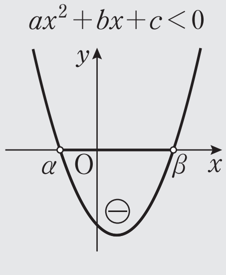
$ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$

$ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$\alpha\leqq x\leqq\beta$





1　次の 2 次不等式を解け

(1)　$(x+2)(x-1)>0$

(2)　$x(x-3)<0$

(3)　$x^2-2x-8 \geqq 0$

(4)　$2x^2-5x-3 \leqq 0$

(5)　$x^2+5x-2>0$

(6)　$-x^2+4x-1>0$

Point Pickup

2 次不等式の解法(1)

2 次不等式は，2 次関数のグラフをかいて考える。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，

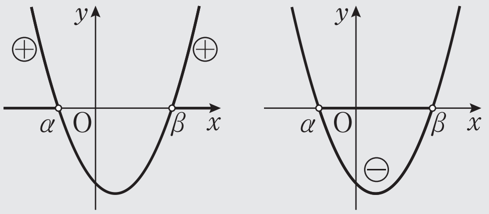
交点の x 座標を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$とすると

$ax^2+bx+c>0$ の解は　$x<\alpha$，$\beta<x$

$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解は　$x \leqq \alpha$，$\beta \leqq x$

$ax^2+bx+c<0$ の解は　$\alpha<x<\beta$

$ax^2+bx+c \leqq 0$ の解は　$\alpha \leqq x \leqq \beta$



α，β は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる 2 解である。よって，2 次式 ax^2+bx+c が因数分解できれば，α，β がわかる。因数分解できないときは，$ax^2+bx+c=0$ とおき，解の公式を用いて α，β を求める。

第10講　PART1 確認問題

次の２次不等式を解け。

1　$(x+1)(x-2)>0$

$x<$ アイ ,　ウ $<x$

2　$x(x-4)<0$

エ $<x<$ オ

3　$x^2+3x-10\geqq 0$

$x\leqq$ カキ ,　ク $\leqq x$

4　$3x^2+5x-2\leqq 0$

ケコ $\leqq x\leqq \dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$

5　$x^2-3x+1>0$

$x<\dfrac{\text{ス}-\sqrt{\text{セ}}}{2}$,　$\dfrac{\text{ソ}+\sqrt{\text{タ}}}{2}<x$

6　$-x^2+6x-2>0$

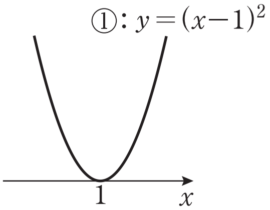
チ $-\sqrt{\text{ツ}}<x<$ テ $+\sqrt{\text{ト}}$

PART2　2次不等式（グラフが接するとき）

要点① 2次不等式（グラフが x 軸と接するとき）

ここでは，2次関数のグラフが x 軸と接する場合の2次不等式について考える。

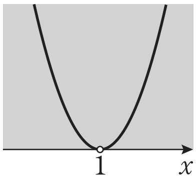
例　2次不等式 $x^2-2x+1>0$，$x^2-2x+1\geqq 0$ を解く。



$x^2-2x+1>0$ より $(x-1)^2>0$

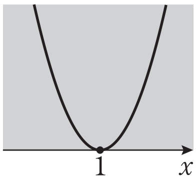
2次関数 $y=(x-1)^2$　……①のグラフと x 軸の共有点の x 座標は $x=$　　であり，①のグラフは右図のように点 $(1,\ 0)$ で x 軸と接する。

2次不等式 $x^2-2x+1>0$ の解は，①のグラフで $y>0$，すなわちグラフが x 軸より上側にあるような x の範囲である。



よって，不等式 $x^2-2x+1>0$ の解は

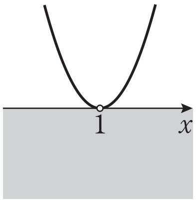
2次不等式 $x^2-2x+1\geqq 0$ の解は，①のグラフで $y\geqq 0$，すなわちグラフが x 軸より上側，または x 軸上にあるような x の範囲である。



よって，不等式 $x^2-2x+1\geqq 0$ の解は

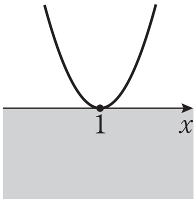
例　2次不等式 $x^2-2x+1<0$，$x^2-2x+1\leqq 0$ を解く。

2次不等式 $x^2-2x+1<0$ の解は，①のグラフで $y<0$，すなわちグラフが x 軸より下側にあるような x の範囲である。



よって，不等式 $x^2-2x+1<0$ の解は

2次不等式 $x^2-2x+1\leqq 0$ の解は，①のグラフで $y\leqq 0$，すなわちグラフが x 軸より下側，または x 軸上にあるような x の範囲である。

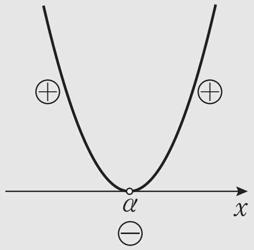


よって，不等式 $x^2-2x+1\leqq 0$ の解は

2 次関数のグラフが x 軸と接するときの 2 次不等式の解は以下となる。

2 次不等式の解（グラフが x 軸と接するとき）

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$）のグラフが x 軸と接するとき，接点の x 座標を $x=\alpha$ とすると



$ax^2+bx+c>0$ の解は　α 以外のすべての実数

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ の解は　ない

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$x=\alpha$

2　次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-4x+4>0$

(2)　$9x^2+6x+1\geqq 0$

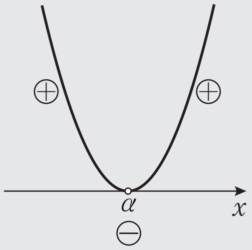
(3)　$x^2+10x+25<0$

(4)　$4x^2-12x+9\leqq 0$

Point Pickup

２次不等式の解法(2)

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解 $x=\alpha$ をもつとき，２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは点 $(\alpha,\ 0)$ で x 軸に接する。このとき，$a>0$ とすると



$ax^2+bx+c>0$ の解は　α 以外のすべての実数

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ の解は　ない

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　$x=\alpha$

第10講　PART2 確認問題

次の 2 次不等式を解け。

いずれも，①～④のうちから選べ。

1　$x^2-6x+9>0$

ア

①　すべての実数

②　3 以外のすべての実数

③　$x=3$　　　④　ない

2　$4x^2+4x+1 \geqq 0$

イ

①　すべての実数

②　$-\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数

③　$x=-\frac{1}{2}$　　　④　ない

3　$x^2+12x+36<0$

ウ

①　すべての実数

②　-6 以外のすべての実数

③　$x=-6$　　　④　ない

4　$9x^2-6x+1 \leqq 0$

エ

①　すべての実数

②　$\frac{1}{3}$ 以外のすべての実数

③　$x=\frac{1}{3}$　　　④　ない

PART3　２次不等式（グラフが共有点をもたないとき）

要点①　２次不等式（グラフが x 軸と共有点をもたないとき）

ここでは，２次関数のグラフが x 軸と共有点をもたないときの２次不等式について考える。

例　２次不等式 $x^2-3x+5>0$，$x^2-3x+5\geqq 0$ を解く。

方程式 $x^2-3x+5=0$　……①の解を求めるために，解の公式を用いると

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}$$

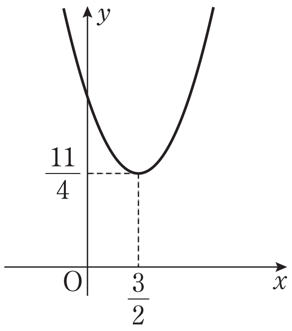
となり，この方程式は実数解をもたない。このことは，方程式①の　　　　　　について

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot5=-11$$

すなわち，D が　　であることから判断することができる。

このとき，２次関数 $y=x^2-3x+5$　……②について

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$



であることから，②のグラフは右図のように x 軸と共有点をもたず，下に凸の放物線であることから，グラフはすべて x 軸より上側にある。

よって，不等式 $x^2-3x+5>0$ の解は

である。

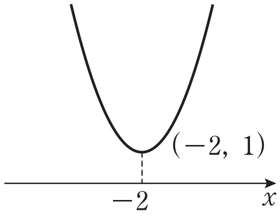
②のグラフは x 軸と共有点をもたないので，不等式 $x^2-3x+5\geqq 0$ の解についても

である。

例　２次不等式 $x^2+4x+5<0$，$x^2+4x+5\leqq 0$ を解く。

方程式 $x^2+4x+5=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1$$



このとき，２次関数 $y=x^2+4x+5$ のグラフは，右図のように下に凸の放物線，かつ x 軸と共有点をもたない。

よって，不等式 $x^2+4x+5<0$ の解は

また，不等式 $x^2+4x+5\leqq 0$ の解についても

2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもたないときの 2 次不等式の解は以下となる。

2 次不等式の解（グラフが x 軸と共有点をもたないとき）

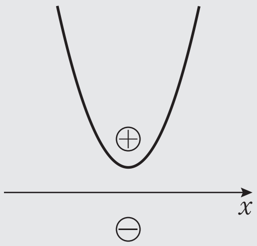
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，

$ax^2+bx+c>0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ の解は　ない

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　ない



3　次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2+5x+7>0$　　(2)　$x^2-2x+3\geqq 0$

(3)　$3x^2+4x+3<0$　　(4)　$-2x^2+x-3\geqq 0$

Point Pickup

2 次不等式の解法(3)

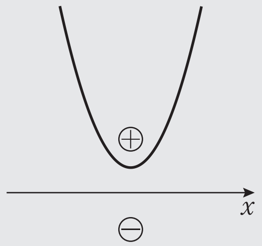
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもたないとき，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。このとき，$a>0$ とすると

$ax^2+bx+c>0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c\geqq 0$ の解は　すべての実数

$ax^2+bx+c<0$ の解は　ない

$ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は　ない



第10講　PART3 確認問題

次の 2 次不等式を解け。

いずれも，①～②のうちから選べ。

1　$x^2-x+4>0$

ア

①　すべての実数　　②　解はない

2　$x^2+4x+7\geqq 0$

イ

①　すべての実数　　②　解はない

3　$2x^2-4x+5<0$

ウ

①　すべての実数　　②　解はない

4　$-x^2+6x-10\geqq 0$

エ

①　すべての実数　　②　解はない

PART4　２次不等式の利用

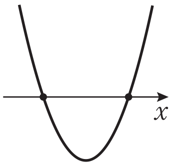
要点 ①　２次関数のグラフと x 軸が共有点をもつ条件

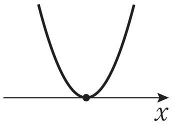
２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもつのは，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

・x 軸と異なる２点で交わる　$\Longleftrightarrow$　D

・x 軸と１点で接する　$\Longleftrightarrow$　D

の２つの場合である。よって，次のことが成り立つ。



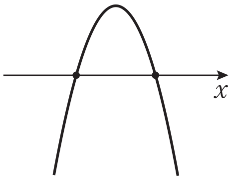


２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもつ条件

２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

x 軸と共有点をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D \geqq 0$

例　２次関数 $y=-x^2+mx-1$ のグラフが x 軸と共有点をもつときの定数 m の値の範囲を求める。



２次方程式 $-x^2+mx-1=0$ の判別式を D とすると，

$$D=m^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=m^2-4$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは D　　のときであるから

$$m^2-4 \geqq 0$$

$$(m+2)(m-2) \geqq 0$$　　よって，$m \leqq -2$，$2 \leqq m$

要点 ②　絶対不等式

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸が共有点をもたないのは，２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

D

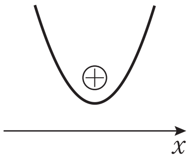
のときである。このとき，x^2 の係数 a について

$a>0$ のとき　常に y

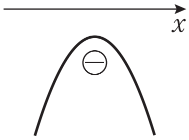
$a<0$ のとき　常に y

である。このことを利用して，与えられた２次不等式の解の条件から，

$a>0$



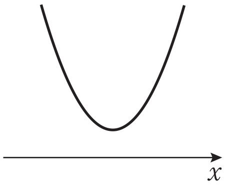
$a<0$



不等式の係数の値の範囲を求めることができる。

例　2 次不等式 $x^2-2kx+2k+3>0$ の解がすべての実数であるとき，定数 k の値の範囲を求める。

2 次関数 $y=x^2-2kx+2k+3$ のグラフは　　に凸の放物線である。よって，不等式の解がすべての実数となるのは，このグラフが x 軸と　　　　　　　　　　ときである。



したがって，2 次方程式 $x^2-2kx+2k+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-1\cdot(2k+3)$$

$k^2-2k-3<0$　　　$(k+1)(k-3)<0$　　　よって，$-1<k<3$

※ 解が「すべての実数」となる不等式，つまり

すべての実数 x について　　　　　　不等式

を「　　　　　　　　」という。

要点 ③　2 次不等式を含む連立不等式

2 次不等式を含む連立不等式についても，これまでの連立不等式と同様，連立不等式に含まれる不等式を同時に満たす x の範囲が，連立不等式の解である。

例　連立不等式 $\begin{cases} x^2+2x-3<0 \\ x^2+6x+8\geqq 0 \end{cases}$ を解く。

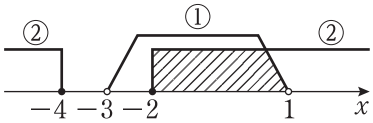
$x^2+2x-3<0$ より $(x+3)(x-1)<0$

よって　　　　　　　……①

$x^2+6x+8\geqq 0$ より $(x+4)(x+2)\geqq 0$

よって　　　　　　　……②

①と②の共通範囲を求めて



4　(1)　2 次関数 $y=x^2+2mx+5$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　2 次不等式 $-2x^2+kx-k<0$ の解がすべての実数のとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　連立不等式 $\begin{cases} x^2-3x+2 \geqq 0 \\ 2x^2-5x-3<0 \end{cases}$ を解け。

Point Pickup

2 次関数のグラフと x 軸が共有点をもつ条件

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ条件は　　$D \geqq 0$

2 次不等式の解がすべての実数となる条件（絶対不等式）

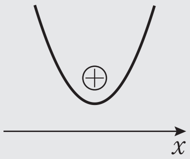
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると

不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解がすべての実数

$\Longleftrightarrow$　$a>0$ かつ $D<0$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ の解がすべての実数

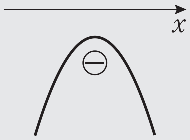
$\Longleftrightarrow$　$a<0$ かつ $D<0$



$a>0$

かつ

$D<0$



$a<0$

かつ

$D<0$

連立 2 次不等式の解法

①　それぞれの不等式を解き，その解を数直線上に図示する。

②　図より，それぞれの解の共通範囲を求める。

第10講　PART4 確認問題

1　2 次関数 $y=3x^2+ax+3$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 a の値の範囲は，

$a \leqq$ [アイ]，[ウ] $\leqq a$ である。

2　2 次不等式 $-x^2+ax+a-3<0$ の解がすべての実数のとき，定数 a の値の範囲は，

[エオ] $<a<$ [カ] である。

3　連立不等式 $\begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ 2x^2-7x-4<0 \end{cases}$ の解は，

[キ] $<x<$ [ク] である。

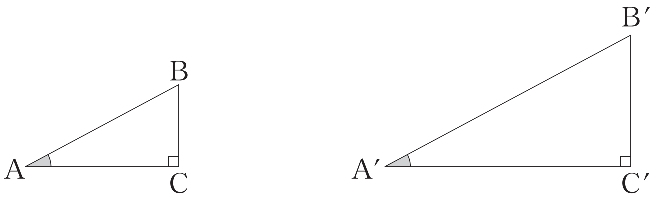
第11講　鋭角の三角比

PART1　直角三角形と三角比

要点①　タンジェント（正接）

2組の角がそれぞれ等しい2つの三角形は　　　の関係にある。

よって，2つの直角三角形 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$（$\angle C = \angle C' = 90°$）において，$\angle A = \angle A'$ ならば，$\triangle ABC$　　$\triangle A'B'C'$ である。



上の図において $BC : B'C' = AC : A'C'$ であるから

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

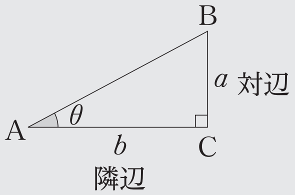
が成り立つ。この　　　　　は 直角三角形の大きさによらず　　　である。

一般に，$\angle C = 90°$ の直角三角形において，2つの辺の長さの比の値 $\dfrac{BC}{AC}$ は，三角形の大きさによらず，$\angle A$ の大きさだけで定まる。この $\dfrac{BC}{AC}$ の値を，$\angle A$ の「　　　」または「　　　　　　　　」といい，「　　$\angle A$」と表す。

タンジェント（正接）

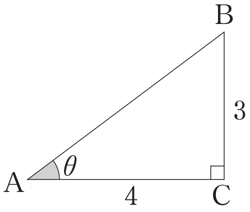
右の図の直角三角形 ABC において，$\angle A = \theta$（シータ）とすると

$$\tan\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} \quad \left(\frac{対辺}{隣辺}\right)$$

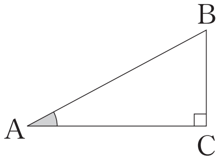


例　右の図の直角三角形 ABC において

$$\tan\theta = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad}$$



要点 ② サイン(正弦)，コサイン(余弦)

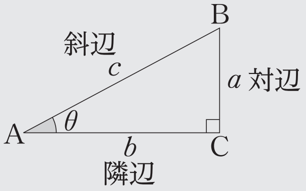


$\angle C=90^\circ$ の直角三角形において，$\angle A$ の正接 $\dfrac{BC}{AC}$ の値が一定であるのと同様に，$\dfrac{BC}{AB}$，$\dfrac{AC}{AB}$ の値も，三角形の大きさによらず，$\angle A$ の大きさだけで一定に定まる。

$\dfrac{BC}{AB}$ の値を，$\angle A$ の「　　　」または「　　　　」といい，「　　$\angle A$」と表し，

$\dfrac{AC}{AB}$ の値を，$\angle A$ の「　　　」または「　　　　」といい，「　　$\angle A$」と表す。

> **サイン(正弦)，コサイン(余弦)**
>
> 右の図の直角三角形 ABC において，$\angle A=\theta$ とすると
>
> $$\sin\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}\quad\left(\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}\right)$$
>
> $$\cos\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}\quad\left(\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}\right)$$

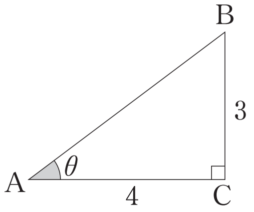


例 右の図の直角三角形 ABC において

三平方の定理により $AB=\sqrt{3^2+4^2}=$

よって　$\sin\theta=\text{――}=-$

$\cos\theta=\text{――}=-$

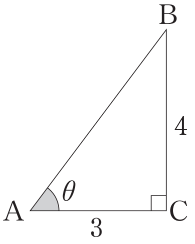


サイン(正弦)，コサイン(余弦)，タンジェント(正接)をまとめて「　　　　」という。

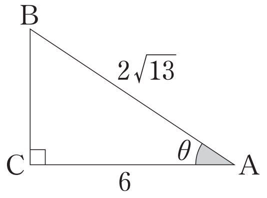
また，sin，cos，tan はそれぞれ sine，cosine，tangent を略した記号である。

1 次の図で，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

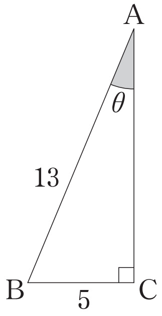
(1)



(2)



(3)



Point Pickup

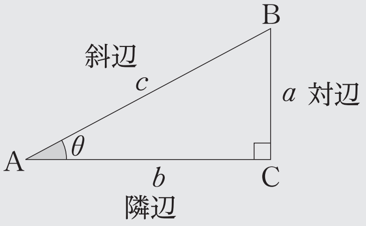
三角比

右の図の直角三角形 ABC において，$\angle \mathrm{A}=\theta$ とすると

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{a}{c}\quad\left(\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}\right)$$

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{b}{c}\quad\left(\frac{\text{隣辺}}{\text{斜辺}}\right)$$

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{a}{b}\quad\left(\frac{\text{対辺}}{\text{隣辺}}\right)$$



三平方の定理を利用することで，2辺の長さから残りの1辺の長さを求めることができる。

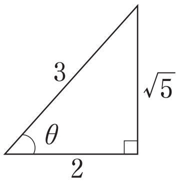
また，三角比の値は，指定がない限り分母の有理化をする必要はない。

第11講 PART1 確認問題

次の図で，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

ただし，ア ～ ケ は，下の①～④のうちから選べ。

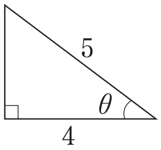
1



$\sin\theta=$ ア ，$\cos\theta=$ イ ，$\tan\theta=$ ウ

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{3}{2}$　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　④ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

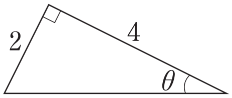
2



$\sin\theta=$ エ ，$\cos\theta=$ オ ，$\tan\theta=$ カ

① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{3}{4}$　③ $\dfrac{3}{5}$　④ $\dfrac{4}{5}$

3



$\sin\theta=$ キ ，$\cos\theta=$ ク ，$\tan\theta=$ ケ

① 2　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　④ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

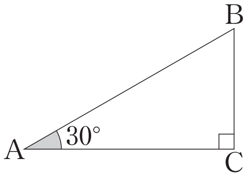
PART2 有名角の三角比，三角比の表

要点① 30°，45°，60°の三角比

∠A＝30°，∠C＝90° の直角三角形 ABC において，

BC：AB：AC＝　：　：　である。

ここで，BC＝1，AB＝2，AC＝$\sqrt{3}$ とすると



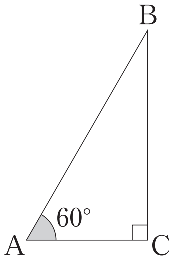
sin 30°＝　，cos 30°＝　，tan 30°＝

である。

三角比の値は直角三角形の大きさによらないので，sin 30°，cos 30°，tan 30° の値は常にこれらの値となる。

∠A＝60°，∠C＝90° の直角三角形 ABC において，

AC＝1，AB＝2，BC＝$\sqrt{3}$ とすると

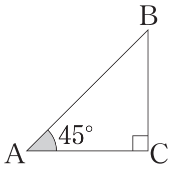


sin 60°＝　，cos 60°＝　，tan 60°＝

であり，sin 60°，cos 60°，tan 60° の値は常にこれらの値になる。

∠A＝45°，∠C＝90° の直角三角形 ABC において，

AC＝1，BC＝1，AB＝$\sqrt{2}$ とすると



sin 45°＝　，cos 45°＝　，tan 45°＝

であり，sin 45°，cos 45°，tan 45° の値は常にこれらの値になる。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

要点② 三角比の表

30°，45°，60° 以外の角についても，三角比の値は存在する。以下はその三角比の値を表す表の一部であり，それぞれの値は，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで示した値である。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
⋮	⋮	⋮	⋮

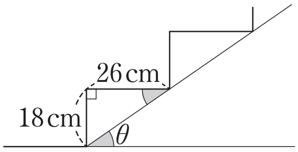
例　上の表より

$\sin 32° =$　　　　，$\cos 32° =$　　　　，$\tan 32° =$

上のような三角比の表を用いて，三角比の値から，角のおよその大きさを求めることができる。

例　右の図は，ある学校の階段の一部である。

この階段の傾斜の角の大きさを θ とすると



$$\theta = \frac{18}{26} = 0.69230\cdots\cdots$$

上の表より，$\tan\theta$ の値が 0.6923 に最も近い θ を求めると　$\theta \fallingdotseq$

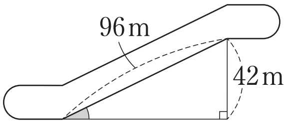
※記号「 ≒ 」は「ほぼ等しい」ことを表す。

2 (1) 次の三角比の値を求めよ。

(i) $\sin 30^\circ$，$\cos 30^\circ$，$\tan 30^\circ$　　(ii) $\sin 45^\circ$，$\cos 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(iii) $\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$，$\tan 60^\circ$

(2) ある商業施設にあるエスカレーターは，全長 96 m，高低差 42 m である。このエスカレーターの傾斜の角の大きさを，以下の三角比の表を用いて求めよ。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

30°，45°，60° の三角比

30° の三角比 $\Longrightarrow$ 30°，60°，90° の直角三角形

45° の三角比 $\Longrightarrow$ 45°，45°，90° の直角三角形

60° の三角比 $\Longrightarrow$ 60°，30°，90° の直角三角形

をかき, 3 つの辺の比を実際の辺の長さとすることで, 三角比の値を求めることができる。

第11講 PART2 確認問題

1 60° の三角比の値は,

$\sin 60^\circ =$ ア, $\cos 60^\circ =$ イ, $\tan 60^\circ =$ ウ

である。ア ～ ウ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑥ $\sqrt{3}$

2 45° の三角比の値は,

$\sin 45^\circ =$ エ, $\cos 45^\circ =$ オ, $\tan 45^\circ =$ カ

である。エ ～ カ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑥ $\sqrt{3}$

3 30° の三角比の値は,

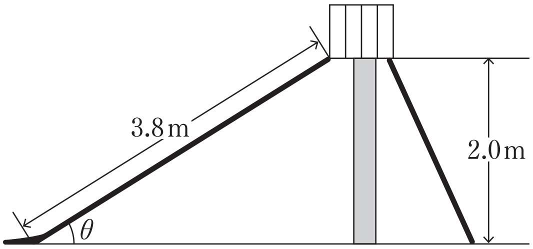
$\sin 30^\circ =$ キ, $\cos 30^\circ =$ ク, $\tan 30^\circ =$ ケ

である。キ ～ ケ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑥ $\sqrt{3}$

4 ある公園のすべり台は，次の図のように，全長が 3.8m，高低差が 2.0m である。



このすべり台の傾斜の角 θ の大きさは，およそ **コサ** 度である。

以下の三角比の表を用いて，最も適する整数値を求めよ。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813

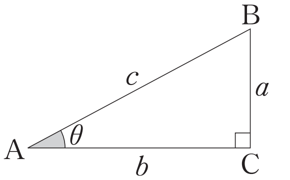
[MEMO]

PART3 三角比の利用

要点 ① 三角比の利用

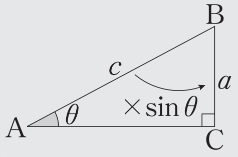
右の図の直角三角形において

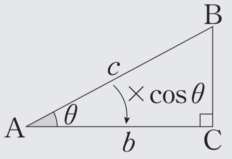
$\sin\theta=$ —， $\cos\theta=$ —， $\tan\theta=$ —

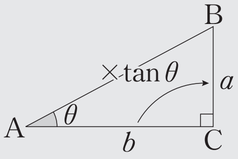


である。これらの式を変形すると，以下の等式が成り立つ。

$a=c\sin\theta$　　　$b=c\cos\theta$　　　$a=b\tan\theta$





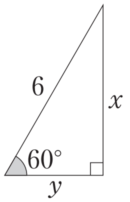


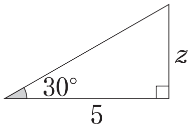
例 右の図の直角三角形において

$x=6$　　　$=6\cdot$　　　$=3\sqrt{3}$

$y=6$　　　$=6\cdot$　$=3$

$z=5$　　　$=5\cdot$　　　$=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$



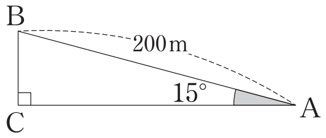


三角比を利用して，直接測ることが難しい長さを求めることができる。

例 傾斜角 15° の坂をまっすぐに 200m 下るとき，水平方向，鉛直方向にどれだけ進むか。
ただし，$\sin 15^\circ=0.2588$，$\cos 15^\circ=0.9659$ とし，小数第 2 位を四捨五入して求める。
右の図の直角三角形 ABC において

$\mathrm{AC}=200$　　　$=200\times0.9659=193.18\fallingdotseq193.2$

$\mathrm{BC}=200$　　　$=200\times0.2588=51.76\fallingdotseq51.8$

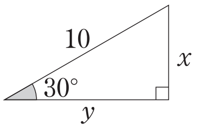


よって

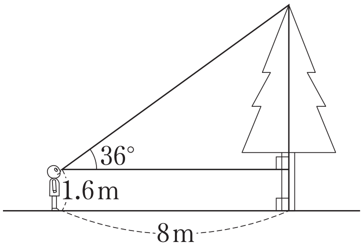
水平方向に 193.2m，鉛直方向に 51.8m 進む

[MEMO]

3 (1) 下の図の直角三角形において，x，y，z の値を求めよ。



(2) 木の根元から 8 m 離れたところで，木の先端を見上げたとき，水平面となす角が 36° であった。目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。ただし，$\sin 36° = 0.5878$，$\cos 36° = 0.8090$，$\tan 36° = 0.7265$ とし，小数第 2 位を四捨五入せよ。



Point Pickup

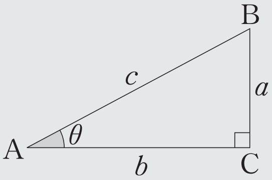
三角比の利用

右の図の直角三角形において

$a = c\sin\theta$

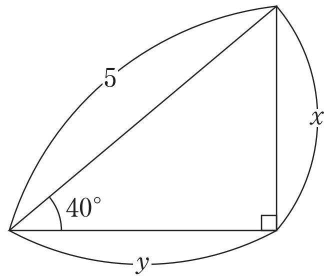
$b = c\cos\theta$

$a = b\tan\theta$



第11講　PART3 確認問題

1　次の図の直角三角形において，$x=$ ア ，$y=$ イ と表される。



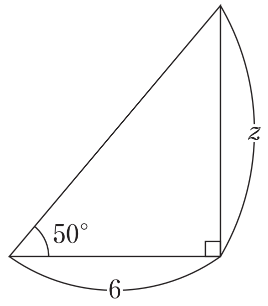
ア ， イ は，次の①～⑥のうちから選べ。

① $5\sin 40^\circ$　　② $5\cos 40^\circ$

③ $5\tan 40^\circ$　　④ $\dfrac{\sin 40^\circ}{5}$

⑤ $\dfrac{5}{\sin 40^\circ}$　　⑥ $\dfrac{\cos 40^\circ}{5}$

2　次の図の直角三角形において，$z=$ ウ と表される。



ウ は，次の①～④のうちから選べ。

① $6\sin 50^\circ$　　② $6\cos 50^\circ$

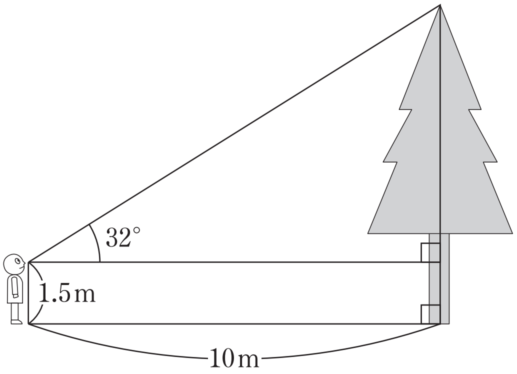
③ $6\tan 50^\circ$　　④ $\dfrac{\tan 50^\circ}{6}$

3 木の根元から水平に 10m 離れた地点で，木の先端を見上げたところ，水平面とのなす角が 32° であった。

目の高さを 1.5m として，木の高さを求めると，およそ

エ . **オ** m である。

ただし，$\sin 32^\circ = 0.5299$，$\cos 32^\circ = 0.8480$，$\tan 32^\circ = 0.6249$ とし，小数第 2 位を四捨五入して答えよ。

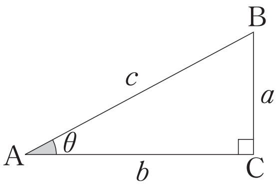


[MEMO]

PART4 三角比の相互関係

要点① 三角比の相互関係

右の図の直角三角形において



$a=\quad c$

$b=\quad c$

である。よって

$$\tan\theta=\frac{\quad}{\quad}=\frac{c\sin\theta}{c\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\quad\cdots\cdots①$$

また，三平方の定理により $a^2+b^2=c^2$ であるから

$$(c\sin\theta)^2+(c\cos\theta)^2=c^2$$

$$c^2(\sin\theta)^2+c^2(\cos\theta)^2=c^2$$

両辺を c^2 で割って　$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$　$\cdots\cdots②$

さらにこの等式の両辺を $(\cos\theta)^2$ で割ると

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1^2=\frac{1}{(\cos\theta)^2}\quad\text{すなわち}\ (\tan\theta)^2+1=\frac{1}{(\cos\theta)^2}\quad\cdots\cdots③$$

$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$ を，それぞれ　　　，　　　，　　　と表すと，①，②，③より，次の公式が成り立つ。

三角比の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　**2**　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　**3**　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

三角比の相互関係を用いると，θ が鋭角のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか 1 つの値から，他の 2 つの値を求めることができる。

例　θ が鋭角で，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求める。

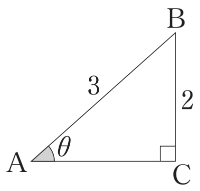
$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{3} \div \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$



※θ が鋭角で，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，右図において三平方の定理により

AC＝

よって　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

4 (1) θ が鋭角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が鋭角で，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

三角比の相互関係

1 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　**2** $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　**3** $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

θ が鋭角のとき，この関係を用いることにより，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか 1 つの値がわかると，他の 2 つの値を求めることができる。

第11講　PART4 確認問題

1　θ が鋭角で，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \tan\theta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

2　θ が鋭角で，$\tan\theta = \sqrt{2}$ のとき，

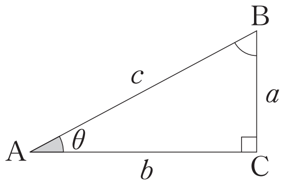
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad \cos\theta = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}$$

である。

PART5 $90^\circ-\theta$ の三角比

要点① $90^\circ-\theta$ の三角比

右の図の直角三角形において，$\angle A=\theta$ とすると



$\sin\theta=$—，$\cos\theta=$—，$\tan\theta=$—

また，三角形の内角の和は　　より

$\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=180^\circ-\theta-90^\circ=$

よって

$\sin(90^\circ-\theta)=$—，$\cos(90^\circ-\theta)=$—，$\tan(90^\circ-\theta)=$—

以上より，次の関係が成り立つ。

$90^\circ-\theta$ の三角比

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$　　$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

ある鋭角が 45° より大きいとき，その角度を $90^\circ-$● の形で表すと，● は 45° より小さい角度となる。よって，上の関係を用いると，45° より大きい鋭角の三角比を，45° より小さい角の三角比で表すことができる。

例 $62^\circ=90^\circ-$　　より

$\sin 62^\circ=\sin(90^\circ-$　　$)=$

[MEMO]

5　次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

(1)　$\sin 68^\circ$　　(2)　$\cos 75^\circ$　　(3)　$\tan 49^\circ$

Point Pickup

$90^\circ-\theta$ の三角比

$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$　　$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$　　$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

この関係を用いることにより，45° より大きい鋭角の三角比を，45° より小さい角の三角比で表すことができる。

第11講　PART5 確認問題

次の三角比を，45° 以下の角の三角比で表せ。

ただし，いずれも①～④のうちから選べ。

1　$\sin 70^\circ =$ ア

①　$\sin 10^\circ$　　②　$\cos 10^\circ$

③　$\sin 20^\circ$　　④　$\cos 20^\circ$

2　$\cos 65^\circ =$ イ

①　$\sin 25^\circ$　　②　$\cos 25^\circ$

③　$\sin 35^\circ$　　④　$\cos 35^\circ$

3　$\tan 80^\circ =$ ウ

①　$\tan 10^\circ$　　②　$\dfrac{1}{\tan 10^\circ}$

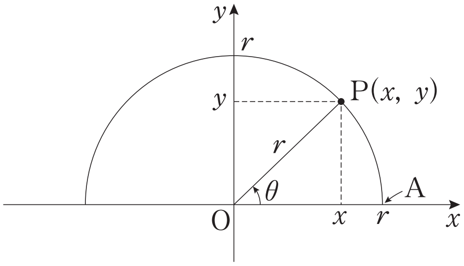
③　$\tan 20^\circ$　　④　$\dfrac{1}{\tan 20^\circ}$

第12講　三角比の拡張

PART1　座標を用いた三角比の定義

要点①　座標を用いた三角比の定義

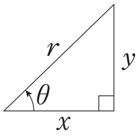
直角三角形の内角は 90° を超えることはない。よって，直角三角形を用いて鈍角の三角比を定義することはできない。ここでは，鈍角や 0°，90°，180° も含めた 0° 以上180° 以下の角の三角比を，座標を用いて定義する。



右の図のように，原点 O を中心とする半径 r の半円をかき，この半円と x 軸の正の部分との交点を A とする。

この半円周上に $\angle AOP=\theta$ となる点 P をとり，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

θ が鋭角，すなわち $0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，三角比の定義より



$$\sin\theta=\frac{\quad}{\quad},\quad \cos\theta=\frac{\quad}{\quad},\quad \tan\theta=\frac{\quad}{\quad}$$

が成り立つ。

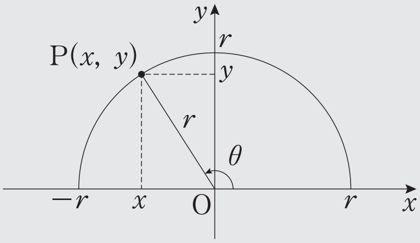
この定義を，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲にあるすべての θ に対して定義する。

座標を用いた三角比の定義

$$\sin\theta=\frac{y}{r}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$



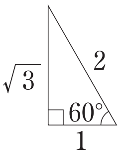
※$\theta=90^\circ$ のときは，$x=0$ であるから，$\tan\theta$ は定義されない。

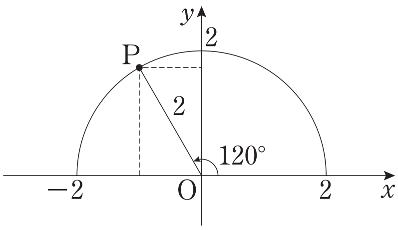
例　120° の三角比の値を求める。

右図の半円において，半径 $r=2$，$\theta=120^\circ$ とすると

P(　　,　　) である。よって

$$\sin 120^\circ=\frac{\quad}{\quad}$$





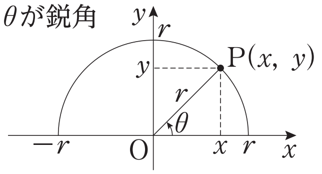
$\cos 120° = $ ――

$\tan 120° = $ ――

θ が鋭角のとき

$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$

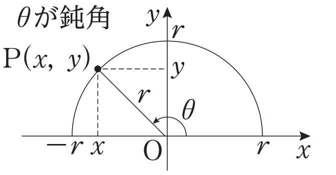
であった。これは右図において，$x > 0$，$y > 0$ であることからもわかる。



θ が鈍角のとき，x 　　，y 　　であるから

$\sin\theta$ 　　，$\cos\theta$ 　　，$\tan\theta$

である。



※直角三角形を用いた三角比の定義と同様，座標を用いた三角比の定義においても，三角比の値は，半径 r の大きさによらず，角 θ の大きさだけで定まる。

1 次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$，$\tan 120^\circ$

(2)　$\sin 135^\circ$，$\cos 135^\circ$，$\tan 135^\circ$

(3)　$\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$，$\tan 150^\circ$

Point Pickup

座標を用いた三角比の定義

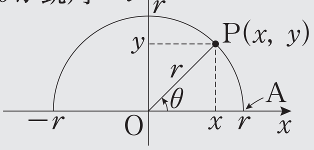
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

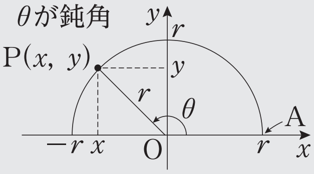
$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

θが鋭角



θが鈍角



三角比の値は，半径 r の大きさによらず，角 θ の大きさだけで定まる。よって，30°，45°，60° の三角比のときに用いた直角三角形の 3 辺の長さの比を参考に，適切な半径 r の半円をかき，この半円周上に $\angle\mathrm{AOP} = \theta$ となる点 P の座標を定め，三角比の値を考えるとよい。

第12講 PART1 確認問題

θ が次の角度のときの θ の三角比の値を求めよ。

ただし，ア ～ ケ は，下の①～⑨のうちから選べ。

1 $\theta=120^\circ$ のとき，$\sin\theta=$ ア，$\cos\theta=$ イ，$\tan\theta=$ ウ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑧ -1　⑨ $-\sqrt{3}$

2 $\theta=150^\circ$ のとき，$\sin\theta=$ エ，$\cos\theta=$ オ，$\tan\theta=$ カ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑧ -1　⑨ $-\sqrt{3}$

3 $\theta=135^\circ$ のとき，$\sin\theta=$ キ，$\cos\theta=$ ク，$\tan\theta=$ ケ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

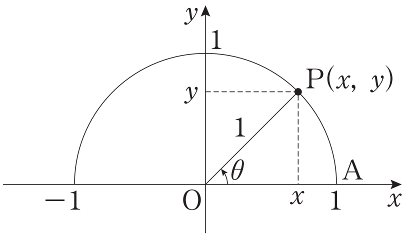
④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

⑦ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑧ -1　⑨ $-\sqrt{3}$

PART2 単位円を用いた三角比の定義

要点① 単位円と三角比

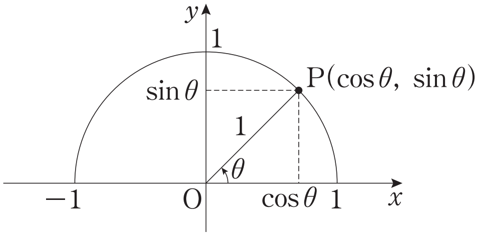
右の図のように，原点Ｏを中心とする半径　の半円をかき，この半円と x 軸の正の部分との交点をＡとする。



この半円周上に $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ となる点Ｐをとり，点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。

拡張した三角比の定義により

$$\sin\theta=\frac{\quad}{\quad}\ ,\quad \cos\theta=\frac{\quad}{\quad}\ ,\quad \tan\theta=\frac{\quad}{\quad}$$



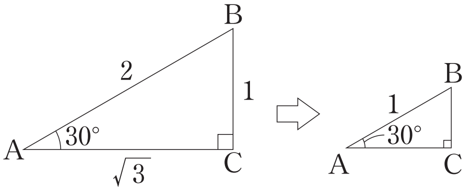
となり

正弦の値は点Ｐの　座標

余弦の値は点Ｐの　座標

と一致する。

原点を中心とする半径１の円を「単位円」という。

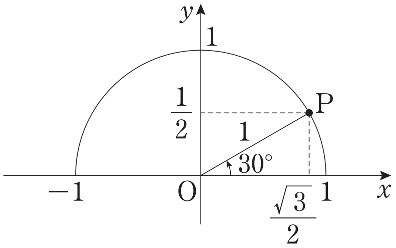


30° の正弦および余弦の値を単位円で考える。

$\angle \mathrm{A}=30^\circ$，$\angle \mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形 ABC において

AB＝2 のとき　BC＝1，AC＝$\sqrt{3}$

AB＝1 のとき　BC＝　，AC＝

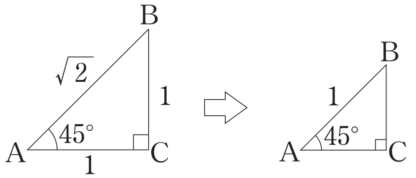


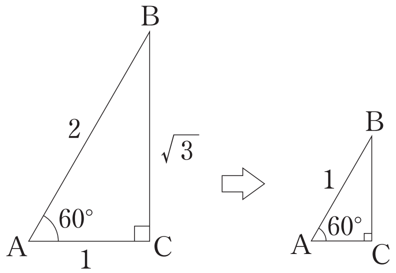
である。よって，単位円を用いると

$\sin 30^\circ=$　，$\cos 30^\circ=$

である。

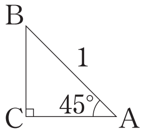
同様に，$\angle \mathrm{A}=45^\circ$，$\angle \mathrm{A}=60^\circ$ の直角三角形を用いることにより，単位円周上の点Ｐの座標を用いて三角比の値を求めることができる。

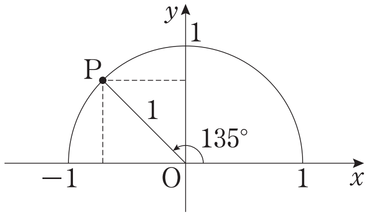




例　$\sin 135^\circ$，$\cos 135^\circ$ の値を，単位円を用いて求める。

右図より



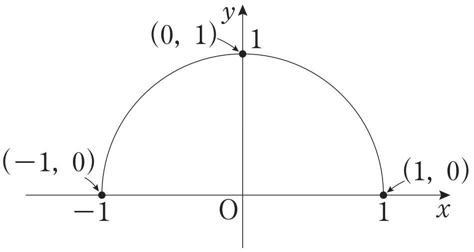


$\sin 135^\circ =$

$\cos 135^\circ =$

要点② 0°，90°，180° の三角比，三角比の値の範囲

0°，90°，180° の三角比は，右図において点 P の座標がそれぞれ (1，0)，(0，1)，(−1，0) のときを考えて，以下となる。

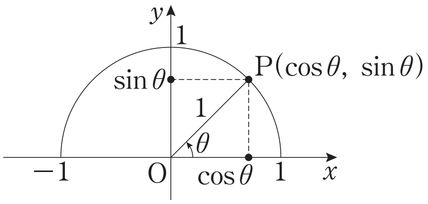


$\sin 0^\circ =$ 　，$\cos 0^\circ =$ 　，$\tan 0^\circ = \frac{\quad}{\quad}$

$\sin 90^\circ =$ 　，$\cos 90^\circ =$ 　，$\tan 90^\circ$

$\sin 180^\circ =$ 　，$\cos 180^\circ =$ 　，$\tan 180^\circ = \frac{\quad}{\quad}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，正弦および余弦のとり得る値の範囲は

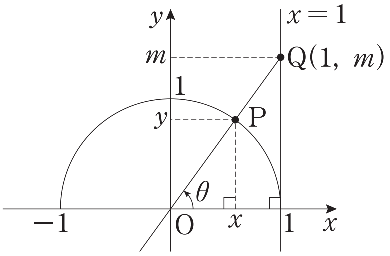


$\leqq \sin\theta \leqq$ 　，　$\leqq \cos\theta \leqq$

である。

正接のとり得る値の範囲について考える。

$\theta \neq 90^\circ$ のとき，右図のように直線 OP と直線 $x=1$ の交点を Q(1，　) とすると



$\tan\theta = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

となり，正接の値は点 Q の y 座標と一致する。

よって

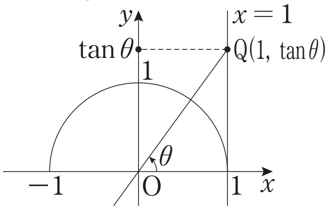
$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき　$\tan\theta \geqq 0$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$\tan\theta \leqq 0$

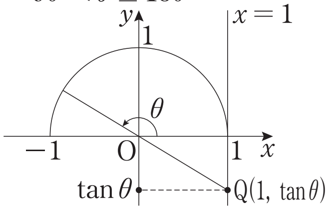
であるから，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\theta \neq 90^\circ$ のとき，$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は

である。

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$



$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$



2　次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

(1)　$\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$

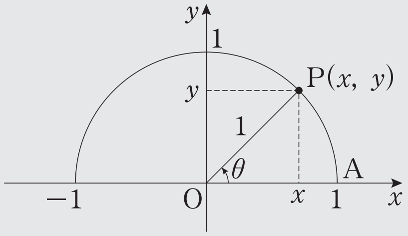
(2)　$\sin 45^\circ$，$\cos 45^\circ$

(3)　$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$

Point Pickup

単位円と三角比

右図のように，原点 O を中心とする半径 1 の円(単位円)の円周上の点 P の座標を P$(x,\ y)$，$\angle \mathrm{AOP}=\theta$ とすると



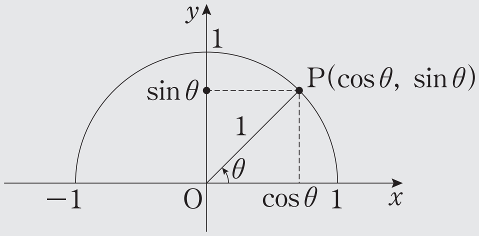
$$\sin\theta = \quad,\ \cos\theta = \quad,\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

つまり

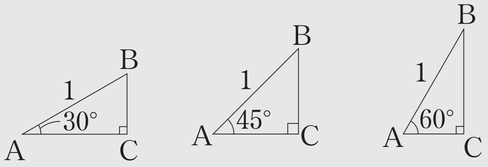
$\cos\theta =$ (点 P の　座標),

$\sin\theta =$ (点 P の　座標)

である。



斜辺が 1 の直角三角形(右図)を用いて点 P の座標を考えることにより，単位円を用いて三角比を求めることができる。

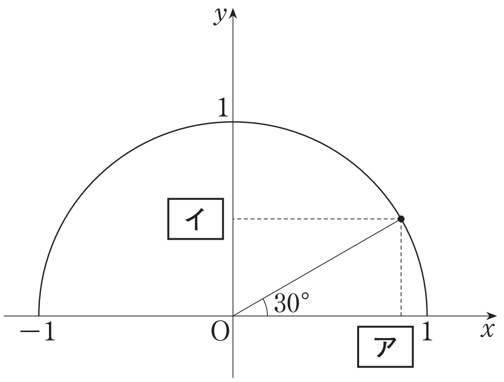


第12講 PART2 確認問題

次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

ただし，ア ～ シ は，下の①～⑥のうちから選べ。

1

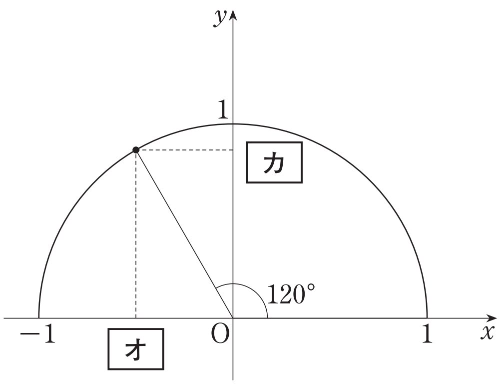


$\sin 30° =$ ウ ，$\cos 30° =$ エ

① $\frac{1}{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\sqrt{3}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2

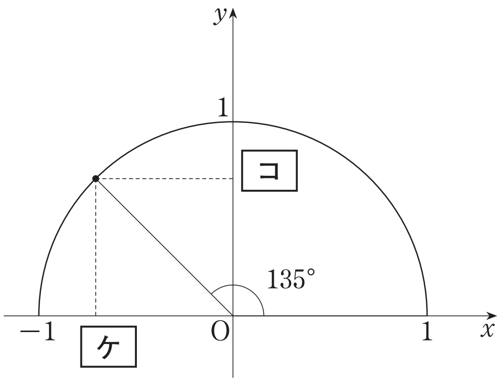


$\sin 120° =$ キ ，$\cos 120° =$ ク

① $\frac{1}{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\sqrt{3}$　⑥ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3



$\sin 135^\circ =$ サ ,　$\cos 135^\circ =$ シ

① $\dfrac{1}{2}$　　② $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　③ $\sqrt{2}$

④ $-\dfrac{1}{2}$　　⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑥ $-\sqrt{2}$

[MEMO]

PART3 三角比の値と角

要点 ① 三角比を含む方程式（正弦・余弦）

正弦や余弦の値が与えられたとき，その角の大きさを単位円を用いて求める。

例 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，等式 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求める。

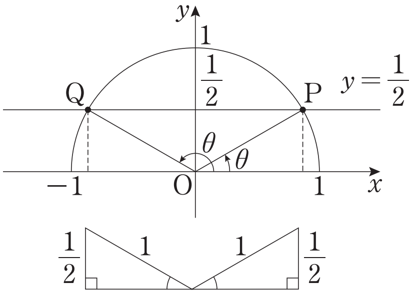
$\sin\theta$ の値は，単位円の円周上の点の　座標と一致する。

単位円の $y \geqq 0$ の部分において y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となるのは，

右図の点 P，Q である。

よって，求める θ は　$\theta =$　　，

※点 P の x 座標は　　，点 Q の x 座標は　　　である。



例 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，等式 $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を求める。

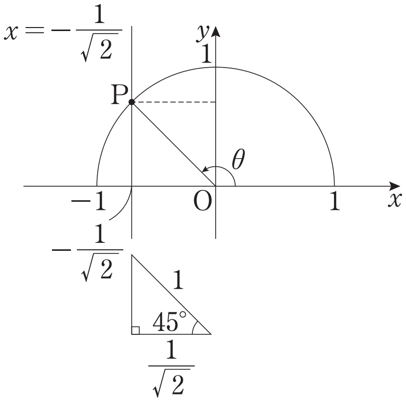
$\cos\theta$ の値は，単位円の円周上の点の　座標と一致する。

単位円の $y \geqq 0$ の部分において x 座標が $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる

のは，右図の点 P である。

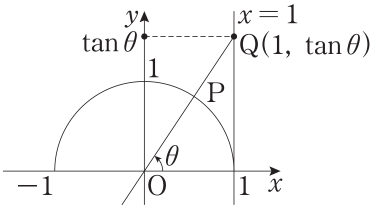
よって，求める θ は　$\theta =$

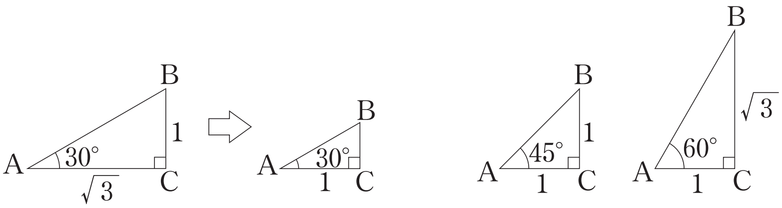
※点 P の y 座標は　　　である。



要点 ② 三角比を含む方程式（正接）

正接の値が与えられたとき，その角の大きさを単位円を用いて求める。その際，隣辺が 1 である直角三角形（下図）を用いて点 Q の座標を考えることにより，正接の値を求めることができる。



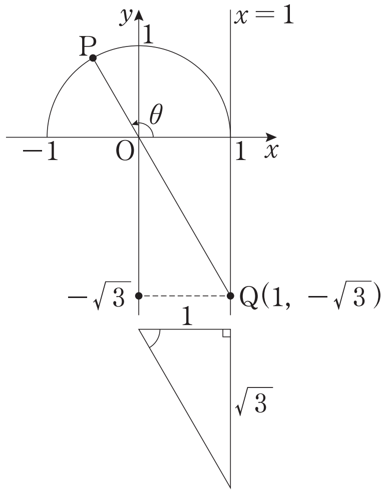


例 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，等式 $\tan\theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ を求める。

直線 $x=1$ 上に，点 $\mathrm{Q}(1,\ -\sqrt{3})$ をとる。

単位円の $y \geqq 0$ の部分と直線 OQ の交点は，右図の点 P である。

よって，求める θ は　$\theta =$



3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Point Pickup

三角比を含む方程式

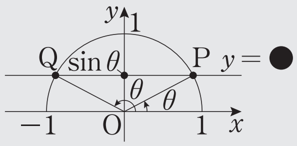
正弦や余弦の値からその角の大きさを求めるときは

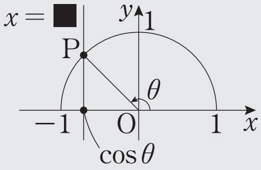
単位円の円周上の点の座標を考える。

$\sin\theta =$ ●　⟹　直線 $y =$ ● と単位円の交点

$\cos\theta =$ ■　⟹　直線 $x =$ ■ と単位円の交点

をとり，角の大きさを求める。



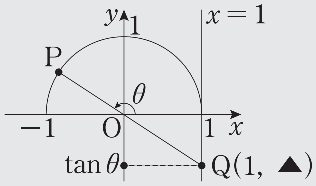


正接の値からその角の大きさを求めるときは

直線 $x = 1$ 上の点の座標を利用する。

$\tan\theta =$ ▲　⟹　点 (1, ▲) と原点を結ぶ直線と単位円の交点

をとり，角の大きさを求める。

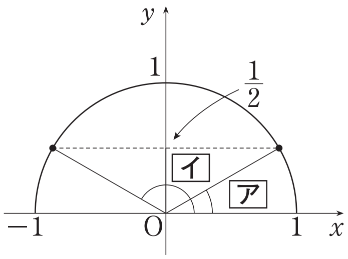


第12講 PART3 確認問題

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

ただし，［ア］～［エ］は，下の①～⑥のうちから選べ。

1 $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

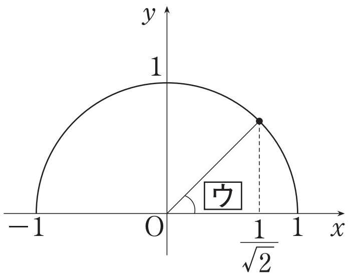


$\theta =$ ［ア］，［イ］

① 30°　② 45°　③ 60°

④ 120°　⑤ 135°　⑥ 150°

2 $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

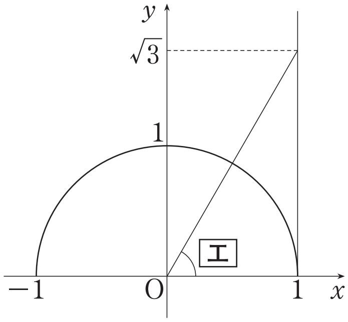


$\theta =$ ［ウ］

① 30°　② 45°　③ 60°

④ 120°　⑤ 135°　⑥ 150°

3 $\tan\theta = \sqrt{3}$



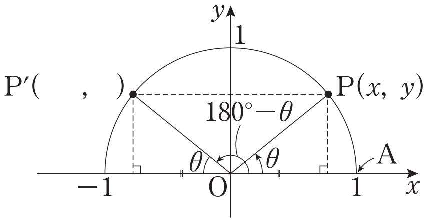
$\theta =$ エ

① 30°　② 45°　③ 60°
④ 120°　⑤ 135°　⑥ 150°

[MEMO]

PART4　$180°-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

要点 ①　$180°-\theta$ の三角比



右図のように，単位円周上に点 P，点 P′ を

$\angle AOP=\theta$，$\angle AOP'=180°-\theta$

となるようにとると，点 P と点 P′ は y 軸に関して対称である。よって，$P(x,\ y)$ とおくと，P′(　，　)となる。

$\sin\theta=$　，$\sin(180°-\theta)=$

$\cos\theta=$　，$\cos(180°-\theta)=$

$\tan\theta=$　，$\tan(180°-\theta)=$

であるから，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の関係が成り立つ。

$180°-\theta$ の三角比

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$　　$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$　　$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$

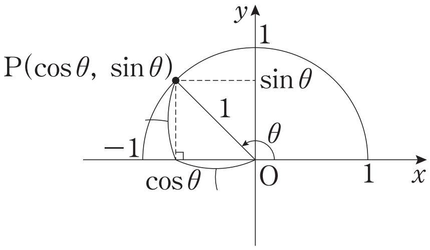
この関係を用いると，鈍角の三角比を鋭角の三角比で表すことができる。

例　$125°=180°-$　　より

$\sin125°=\sin(180°-$　　$)=$

要点 ②　単位円と三角比の相互関係

θ が鋭角のときの三角比の相互関係が，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のときも成り立つかについて，単位円を用いて確認する。



右図において $\tan\theta=$———

また，三平方の定理より

$(\quad)^2+(\quad)^2=1^2$

よって　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

この等式の両辺を $\cos^2\theta$ で割って整理すると

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

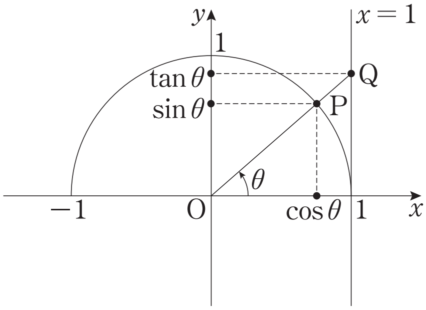
したがって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のときも次の関係が成り立つ。

三角比の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　**2**　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　　**3**　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

この相互関係を用いると，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか１つの値から，他の２つの値を求めることができる。その際，θ が鋭角の場合，鈍角の場合のそれぞれにおいて三角比の符号に注意する必要がある。

θ が鋭角$(0^\circ<\theta<90^\circ)$の場合

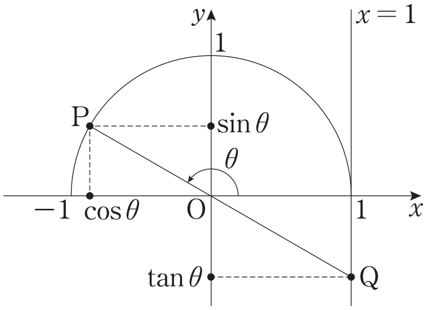


$\sin\theta$

$\cos\theta$

$\tan\theta$

θ が鈍角$(90^\circ<\theta<180^\circ)$の場合



$\sin\theta$

$\cos\theta$

$\tan\theta$

例　$90^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\cos\theta$　　であるから

$\cos\theta=$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3}{5}\div$　　　$=\dfrac{3}{5}\times$

4 (1) 次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(ⅰ) $\sin 153^\circ$　(ⅱ) $\cos 102^\circ$　(ⅲ) $\tan 170^\circ$

(2)(ⅰ) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ⅱ) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ⅲ) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

$180^\circ - \theta$ の三角比

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$　$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

この関係を用いることにより，鈍角の三角比を，鋭角の三角比で表すことができる。

三角比の相互関係

1 $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　**2** $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　**3** $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

この関係を用いることにより，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうちどれか 1 つの値がわかると，他の 2 つの値を求めることができる。

・θ が鋭角のとき　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$

・θ が鈍角のとき　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$，$\tan\theta < 0$

であることに注意。

第12講 PART4 確認問題

1 $\sin 160^\circ$ を鋭角の三角比で表したものを，次の①～④から選べ。 ア

① $\sin 10^\circ$　② $\sin 20^\circ$
③ $\cos 10^\circ$　④ $\cos 20^\circ$

2 $\cos 110^\circ$ を鋭角の三角比で表したものを，次の①～④から選べ。 イ

① $\sin 70^\circ$　② $-\sin 70^\circ$
③ $\cos 70^\circ$　④ $-\cos 70^\circ$

3 $\tan 140^\circ$ を鋭角の三角比で表したものを，次の①～④から選べ。 ウ

① $\tan 40^\circ$　② $-\tan 40^\circ$
③ $\dfrac{1}{\tan 40^\circ}$　④ $-\dfrac{1}{\tan 40^\circ}$

4 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$ のとき,

$\cos\theta =$ エ , $\tan\theta =$ オ

である。

エ , オ は次の①～⑥のうちから選べ。

① $-\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$

④ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{7}}{3}$ ⑥ $\frac{1}{4}$

5 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\cos\theta = -\frac{2}{3}$ のとき,

$\sin\theta =$ カ , $\tan\theta =$ キ

である。

カ , キ は次の①～⑥のうちから選べ。

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⑥ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

6 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -\frac{4}{3}$ のとき,

$\cos\theta =$ ク , $\sin\theta =$ ケ

である。

ク , ケ は次の①～⑥のうちから選べ。

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$ ⑥ $-\frac{3}{4}$

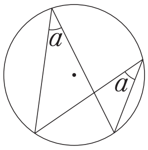
【MEMO】

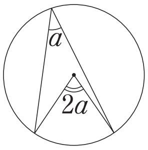
第 13 講　正弦定理・余弦定理
PART1 正弦定理

要点 ① 円に内接する四角形の対角の和

円周角の定理

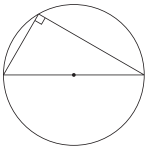
> 1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，
> その弧に対する中心角の半分である。



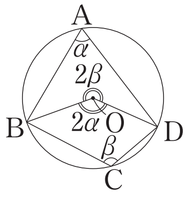


により，以下のことがわかる。

> 半円の弧に対する円周角の大きさは 90° である。



ここでは，円周角の定理を利用して，円に内接する四角形の対角の和を求める。



右図より $2\alpha+2\beta=360°$

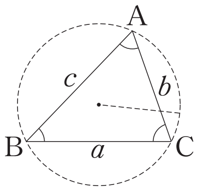
$\alpha+\beta=180°$

よって $\angle A+\angle C=180°$

同様に $\angle B+\angle D=180°$

したがって，円に内接する四角形の対角の和は 180° である。

要点 ② 正弦定理

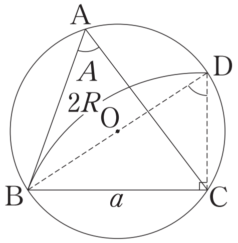


以降は，△ABC の 3 つの角 ∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C，対辺の長さをそれぞれ a，b，c とする。

また，三角形の 3 つの頂点を通る円はただ 1 つに定まる。この円を，その三角形の「　　　　　」という。

ここでは，△ABC の 3 つの辺の長さ a，b，c と 3 つの角の正弦 $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$，および △ABC の外接円の半径との間に成り立つ関係について考える。

△ABC の外接円の中心を O，半径を R とする。



[1] A が鋭角のとき

右図の直角三角形 BCD において

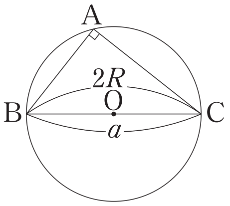
$a=$

円周角の定理から $D=$

よって $a=2R\sin A$

[2]　A が直角のとき

右図の直角三角形 ABC において



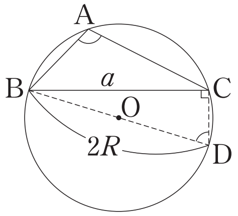
$a=2R$

ここで，$\sin 90^\circ=1$ であるから

$a=2R\cdot 1=2R\sin 90^\circ=2R\sin A$

[3]　A が鈍角のとき

右図の直角三角形 BCD において



$a=$

四角形 ABDC は円に内接するから

$A+D=$

よって $a=2R\sin D=2R\sin($　　　　$)=2R$

[1] ～ [3] より $a=2R\sin A$　すなわち　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つ。

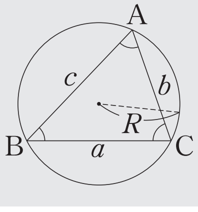
同様に $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ が成り立つ。

以上より，次の定理が成り立つ。

正弦定理

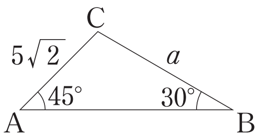
△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



例　△ABC において，$b=5\sqrt{2}$，$A=45^\circ$，$B=30^\circ$ のとき，

a と外接円の半径 R を求める。

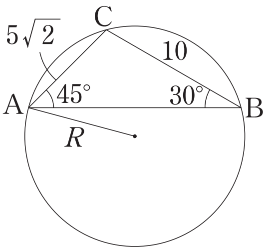


正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから

―――＝―――

よって　$a=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=5\sqrt{2}\div\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\times 2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10$

正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ であるから ―――＝



よって　$R=\dfrac{5\sqrt{2}}{2\sin 30^\circ}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{1}{2}}=5\sqrt{2}$

1 (1) △ABC において，$b=5$，$B=45^\circ$, $C=75^\circ$ のとき，a を求めよ。また，△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

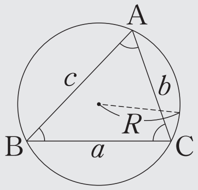
(2) $c=2\sqrt{3}$ である △ABC において，外接円の半径が $R=2$ のとき，C を求めよ。

Point Pickup

正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



ある辺の長さとその対角の大きさが与えられたとき，
正弦定理を利用して，他の辺の長さや角の大きさ，外接円の半径を求めることができる。
外接円の半径が与えられた場合も，正弦定理の利用を考える。

第13講　PART1 確認問題

1　△ABC において，$b=2$，$B=45^\circ$，$C=60^\circ$ のとき，

$c=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である。

2　△ABC において，外接円の半径を R とすると，

$a=6$，$A=120^\circ$ のとき，$R=\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

3　△ABC において，外接円の半径を R とする。

$b=2$，$R=\sqrt{2}$ のとき，

$B=\boxed{\text{エオ}}^\circ$ または，$\boxed{\text{カキク}}^\circ$ である。

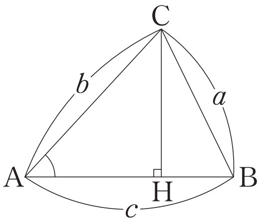
PART2 余弦定理

要点 ① 余弦定理

ここでは，△ABC の 1 辺の長さ a を，その対角の余弦 $\cos A$ と他の 2 つの辺の長さ b, c で表す。

[1]　A，B がともに鋭角のとき

頂点 C から辺 AB に垂線 CH を下ろす。



直角三角形 BCH で，三平方の定理より

$$BC^2 = CH^2 + BH^2$$

すなわち $a^2 = CH^2 + BH^2$　……①

また，直角三角形 ACH において

CH =　　　　　……②

AH =

よって $BH = AB - AH = c - b\cos A$　……③

①，②，③より

$$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$$

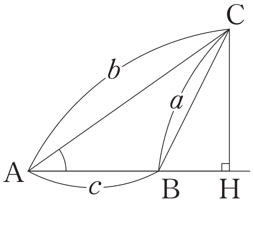
$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

よって，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つ。

[2]　B が鈍角のとき

頂点 C から辺 AB の延長上に垂線 CH を下ろすと，



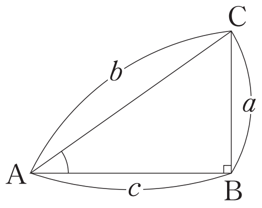
$BH = AH - AB = b\cos A - c$ より

$$a^2 = CH^2 + BH^2$$

$$= (b\sin A)^2 + (b\cos A - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

よって，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ が成り立つ。

[3]　B が直角のとき，$a^2 = b^2 - c^2$ が成り立つ。



また，$b\cos A = c$ であるから

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2c \cdot c$$

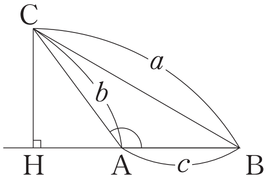
$$= b^2 - c^2$$

$$= a^2$$

よって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ は，B が直角の場合も

成り立つ。

[4]　A が鈍角のとき



頂点 C から辺 AB の延長上に垂線 CH を下ろすと

直角三角形 ACH において

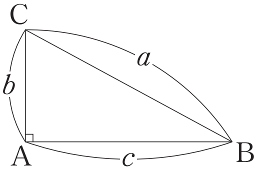
CH＝

AH＝

よって，$a^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{BH}^2=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

よって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ が成り立つ。

[5]　A が直角のとき，$a^2=b^2+c^2$ が成り立つ。



また，$\cos A=\cos 90^\circ=$　であるから

$b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2$

よって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ は，A が直角の場合も成り立つ。

以上より，次の定理が成り立つ。

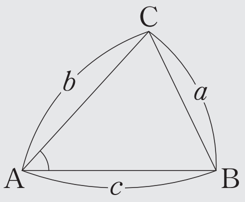
余弦定理

△ABC について

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

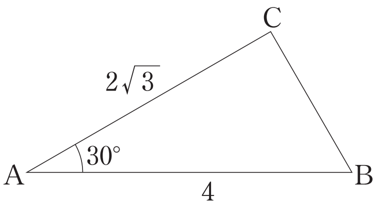
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



例　△ABC において，$b=2\sqrt{3}$，$c=4$，$A=30^\circ$ のとき，a を求める。

余弦定理より



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=$

$=12+16-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 4\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}=4$

$a>0$ より $a=2$

2　△ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　$b=2\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45°$ のとき，a を求めよ。

(2)　$c=3$，$a=2$，$B=120°$ のとき，b を求めよ。

Point Pickup

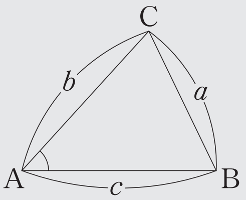
余弦定理

△ABC について

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



2 辺の長さとその間の角の大きさが与えられたとき，余弦定理を用いて，残りの辺の長さを求めることができる。

第13講　PART2 確認問題

1　△ABC において，$a=4$，$c=3$，$B=60°$ のとき，

$b=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。

2　△ABC において，$a=3$，$b=2\sqrt{2}$，$C=135°$ のとき，

$c=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

PART3 余弦定理の利用

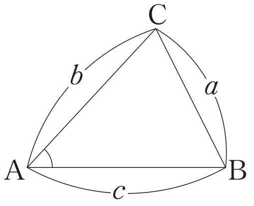
要点① 余弦定理を利用して角の大きさを求める

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



を変形することで，次の式が得られる。

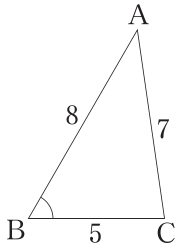
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},\quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

例　△ABC において，$a=5$，$b=7$，$c=8$ のとき，B を求める。

余弦定理より

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \underline{\qquad\qquad} = \frac{40}{2\cdot 8\cdot 5} = \frac{1}{2}$$

よって $B = 60^\circ$



要点② 2 辺と 1 つの角から残りの辺を求める

余弦定理を用いて，2 つの辺の長さとその間ではない角の大きさが与えられたとき，残りの辺の長さを求める。

例　△ABC において，$b=\sqrt{13}$，$c=4$，$B=60^\circ$ のとき，a を求める。

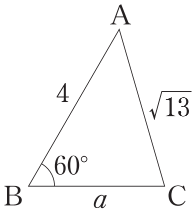
余弦定理より

$$(\sqrt{13})^2 = 4^2 + \quad\ - 2\cdot 4\cdot \quad \cdot\cos 60^\circ$$

$$13 = 16 + a^2 - 2\cdot 4\cdot a\cdot \frac{1}{2}$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0 \qquad (a-1)(a-3) = 0$$

よって　$a = 1,\ 3$　（ともに $a>0$）



[MEMO]

3　△ABC において，次の問いに答えよ。

(1)　$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}$，$c=4$ のとき，A を求めよ。

(2)　$a=2\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{7}$，$C=30^\circ$ のとき，b を求めよ。

Point Pickup

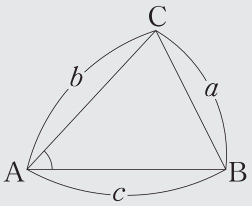
余弦定理の利用

△ABC について

① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ $\Longleftrightarrow$ ①′ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ $\Longleftrightarrow$ ②′ $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ $\Longleftrightarrow$ ③′ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



・①～③は，2 辺の長さと 1 つの角の大きさから，残りの 1 辺の長さを求めるとき

・①′～③′ は，3 辺の長さから，ある角の大きさを求めるとき

に使うとよい。

第13講　PART3 確認問題

1　△ABC において，$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{7}$ のとき，

$C=$ アイ °である。

2　△ABC において，$a=7$，$b=5$，$A=60°$ のとき，

$c=$ ウ である。

PART4 三角形の決定

要点 ① 三角形の辺と角の関係

△ABC において

A が鋭角 $\iff$ $\cos A$

A が直角 $\iff$ $\cos A$

A が鈍角 $\iff$ $\cos A$

である。また，余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

であり，$2bc>0$ であるから，$\cos A$ の符号と $b^2+c^2-a^2$ の符号は一致する。よって，

$\cos A>0 \iff b^2+c^2-a^2>0 \iff b^2+c^2>a^2$

$\cos A=0 \iff b^2+c^2-a^2=0 \iff b^2+c^2=a^2$

$\cos A<0 \iff b^2+c^2-a^2<0 \iff b^2+c^2<a^2$

であるから，次のことがいえる。

> △ABC において
>
> A が鋭角 $\iff$ $b^2+c^2>a^2$
>
> A が直角 $\iff$ $b^2+c^2=a^2$
>
> A が鈍角 $\iff$ $b^2+c^2<a^2$

例　△ABC において, $a=7$, $b=4$, $c=5$ のとき, A は鋭角, 直角, 鈍角のいずれであるか求める。

$4^2+5^2=41$，$7^2=49$ より 4^2+5^2　7^2　つまり b^2+c^2　a^2

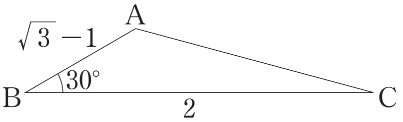
よって，A は　　　である。

要点 ② 三角形の決定

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさが与えられたとき，残りの辺の長さや角の大きさを，正弦定理や余弦定理を用いて求めることができる。

例　△ABC において，$a=2$，$c=\sqrt{3}-1$，$B=30^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求める。

余弦定理より



$b^2=$

$=4-2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=2$

$b>0$ より $b=\sqrt{2}$

余弦定理より

$\cos A = \dfrac{\qquad\qquad}{} = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \dfrac{\qquad}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$A=$

したがって　$C=\qquad\qquad=15°$

※$b=\sqrt{2}$ を求めたあとに，正弦定理を用いると

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30°}=\dfrac{2}{\sin A}$

$\sin A=2\times\dfrac{\sin 30°}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

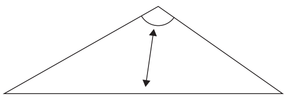
よって $A=$　　　　　であり

$A=$　　のとき　$C=180°-(45°+30°)=105°$

$A=$　　のとき　$C=180°-(135°+30°)=15°$

である。

ここで，三角形について



最大の辺の対角が最大の角

が成り立つことを用いると，$c<b<a$ より，

a が最大の辺であることから，A が最大の角である。

したがって，$A=45°$ は適さず，$A=135°$ は適する。

ゆえに $A=135°$，$C=15°$

4 (1) △ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか。

(2) △ABC において，$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$C=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

Point Pickup

三角形の辺と角の関係

△ABC において

A が鋭角 $\Longleftrightarrow$ $b^2+c^2>a^2$

A が直角 $\Longleftrightarrow$ $b^2+c^2=a^2$

A が鈍角 $\Longleftrightarrow$ $b^2+c^2<a^2$

三角形の決定

三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさから，残りの辺の長さや角の大きさを，正弦定理や余弦定理を用いて求めることができる。

・ある辺とその対角がわかる $\Longrightarrow$ 正弦定理の利用

・2 辺とその間の角がわかる，3 辺がわかる $\Longrightarrow$ 余弦定理の利用

を考えるとよい。

第13講　PART4 確認問題

1　△ABC において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，A は

[ア] である。

[ア] は，次の①～③のうちから選べ。

①　鋭角　　②　直角　　③　鈍角

2　△ABC において，$b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=60^\circ$ のとき，

残りの辺の長さと角の大きさを求めると，

$$a=\sqrt{\boxed{\text{イ}}},\ B=\boxed{\text{ウエ}}^\circ,\ C=\boxed{\text{オカ}}^\circ$$

である。

第 14 講　図形の計量
PART1　三角形の面積

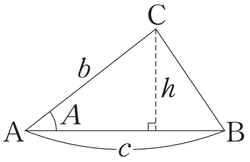
要点 ①　三角形の高さと面積

三角比を用いて，三角形の面積を求める。

△ABC において，辺 AB を底辺としたときの高さを h とする。

(i)　A が鋭角のとき

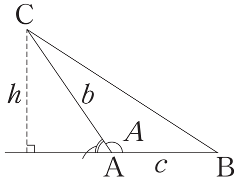
$\sin A =$ ― より $h =$



(ii)　A が鈍角のとき

$\sin(180°-A) =$ ― より

$h = b\sin(180°-A) =$



(i)，(ii)より $h = b\sin A$ である。

また，A が直角のときも $h = b = b\cdot 1 = b\sin 90° = b\sin A$ である。

したがって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ch=\frac{1}{2}\cdot c\cdot b\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$$

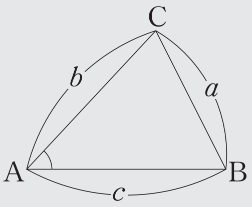
よって，△ABC の面積 S は，2 辺の長さ b，c とその間の角の正弦の値 $\sin A$ で表される。

以上より，次のことが成り立つ。

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

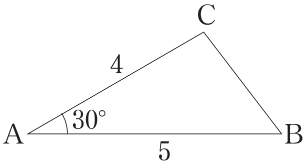
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



例　△ABC において，$b=4$，$c=5$，$A=30°$ のとき，△ABC の面積 S を求める。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\ \cdot\ \cdot \qquad =\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{1}{2}=5$$

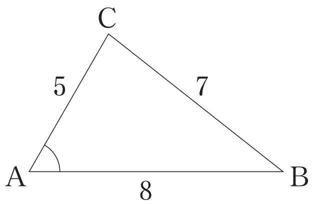


要点② 3辺の長さから三角形の面積を求める

余弦定理を利用して，3辺の長さが与えられた三角形の面積を求める。

例 $a=7$，$b=5$，$c=8$ である △ABC の面積 S を求める。

余弦定理より



$$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\cdot5\cdot8}=\frac{40}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2}\qquad A=$$

よって $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\sin$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

※$\cos A=\frac{1}{2}$ より，三角比の相互関係 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ から

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=$

よって $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot8\cdot\qquad=10\sqrt{3}$

1 次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$b=4$，$c=7$，$A=60°$

(2)　$a=5$，$b=3$，$C=135°$

(3)　$c=8$，$a=6$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

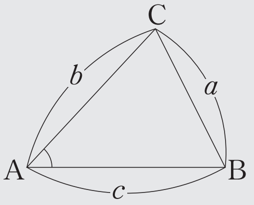
(4)　$a=\sqrt{13}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}$

Point Pickup

三角形の面積

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



2 辺とその間の角(またはその間の角の正弦の値)が与えられた場合は，この公式で面積を求めることができる。

3 辺の長さが与えられたときは，以下の手順で三角形の面積を求める。

①　余弦定理より $\cos A$ の値を求める。

②　$\cos A$ から角度 A が求められる場合は求める。
　角度 A が求められない場合は，三角比の相互関係 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ を用いて $\sin A$ の値を求める。

③　公式を用いて面積を求める。

第14講 PART1 確認問題

1 △ABC において，$b=3$，$c=4$，$A=60^\circ$ のとき，面積は

$\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2 △ABC において，$a=4$，$b=3\sqrt{2}$，$C=45^\circ$ のとき，面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

3 △ABC において，$c=5$，$a=3$，$\sin B=\dfrac{2}{3}$ のとき，面積は $\boxed{\text{エ}}$ である。

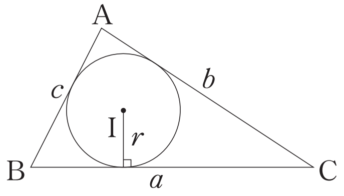
4 △ABC において，$a=4$，$b=3$，$c=2$ のとき，

$\cos A=-\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，面積は

$\dfrac{\boxed{\text{コ}}\sqrt{\boxed{\text{サシ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

PART2 三角形の内接円と面積

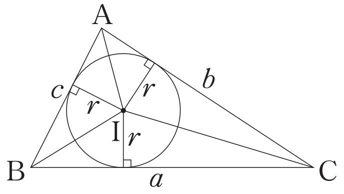
要点① 三角形の内接円と面積



三角形の 3 つの辺に接する円はただ 1 つに定まる。

この円を，その三角形の「　　　　　」という。

△ABC の内接円の中心を I，半径を r とすると，△ABC は 3 つの三角形 △IBC，△ICA，△IAB に分割することができ，r は △IBC，△ICA，△IAB の底辺をそれぞれ辺 BC，辺 CA，辺 AB としたときの高さである。



よって，△ABC の面積 S は

$$S=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$$

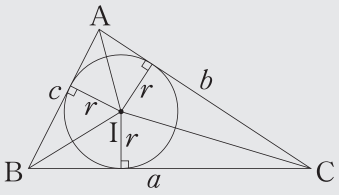
$$=\qquad+\qquad+\qquad=$$

以上より，次のことが成り立つ。

三角形の内接円と面積

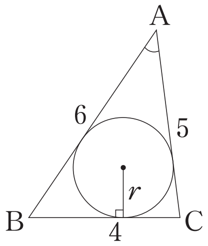
△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



例 △ABC において，$a=4$，$b=5$，$c=6$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求める。

余弦定理より



$$\cos A=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{45}{2\cdot5\cdot6}=\frac{3}{4}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

△ABC の面積を S とすると $S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より　　　　$=$　　　　$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{15}{2}r$　　$r=\frac{\sqrt{7}}{2}$

【MEMO】

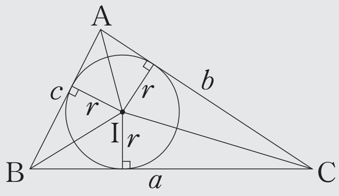
2　$a=8$，$b=7$，$c=6$ である △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

Point Pickup

三角形の面積

△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



第14講 PART2 確認問題

1 △ABC において，$a=7$，$b=3$，$c=8$ である。
この三角形の内接円の半径 r を求める。

余弦定理により，

$$\cos A=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

であるから，

$$A=\boxed{ウエ}^\circ$$

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$$

以上により，r を求めると，

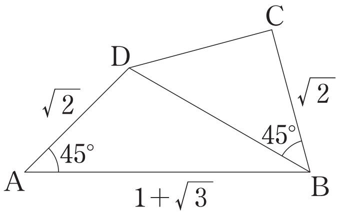
$$r=\frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}}$$

PART3 四角形の面積

要点 ① 四角形の面積

四角形の面積を，対角線によって分割された 2 つの三角形の面積の和として求める。

例 右図のような四角形 ABCD の面積 S を求める。



$\triangle$ABD において，余弦定理より

$$BD^2=(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$

$$=2+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

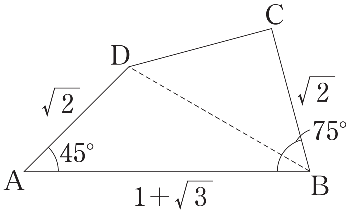
$BD>0$ より $BD=2$

よって $S=\triangle ABD+\triangle BCD$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sin 45^\circ+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

例 右図のような四角形 ABCD の面積 S を求める。



$\triangle$ABD において

余弦定理より $BD=2$

正弦定理より $\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}$

$$\sin\angle ABD=\sqrt{2}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$\angle ABD<135^\circ$ より $\angle ABD=30^\circ$

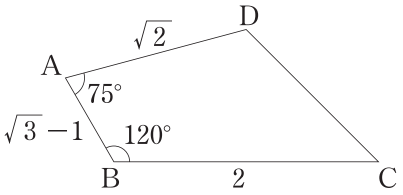
よって $\angle DBC=75^\circ-30^\circ=45^\circ$

したがって $S=\triangle ABD+\triangle BCD=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

分割されたそれぞれの三角形の面積を求めるために，どの辺の長さや角の大きさが必要かを考え，正弦定理や余弦定理などを用いて三角形の辺の長さや角の大きさを求める。

[MEMO]

3 AB $=\sqrt{3}-1$，BC $=2$，DA $=\sqrt{2}$，$\angle$A $=75^\circ$，$\angle$B $=120^\circ$ である四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



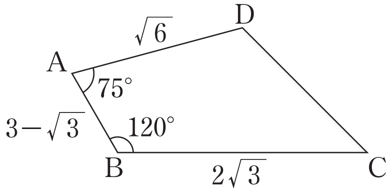
Point Pickup

四角形の面積

対角線によって分割された 2 つの三角形の面積の和として求める。正弦定理や余弦定理などを用いてそれぞれの三角形の辺の長さや角の大きさを求める。

第14講　PART3 確認問題

1　$AB=3-\sqrt{3}$，　$BC=2\sqrt{3}$，　$DA=\sqrt{6}$，　$\angle A=75°$，
$\angle B=120°$ である。この四角形 ABCD の面積 S を求める。



△ABC で余弦定理より，対角線 AC の長さを求めると，

$$AC=\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$$

△ABC で正弦定理により，

$$\angle BAC=\boxed{ウエ}°$$

また，$\angle DAC=\boxed{オカ}°$

よって，四角形 ABCD の面積 S は，

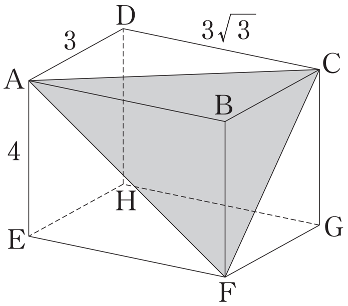
$$S=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

PART4 空間図形への応用

要点① 直方体の切り口の面積

空間図形に含まれる三角形に注目し，長さや面積を求める。

例 右図のような直方体 ABCD−EFGH がある。



△ACF の面積を求める。

△ABC，△ABF，△BCF のそれぞれにおいて

三平方の定理より

$$AC=\sqrt{3^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{36}=6$$

$$AF=\sqrt{4^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{43}$$

$$CF=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

△ACF で余弦定理より

$$\cos\angle ACF=\frac{6^2+5^2-(\sqrt{43})^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{18}{2\cdot6\cdot5}=\frac{3}{10}$$

$$\sin\angle ACF=\sqrt{1-\cos^2\angle ACF}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{91}}{10}$$

よって $\triangle ACF=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot\sin\angle ACF=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{\sqrt{91}}{10}=\frac{3\sqrt{91}}{2}$

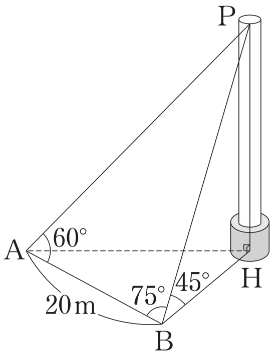
要点② 空間の測量

三角比を利用して，直接測ることが難しい長さを求めることができる。

例 校庭にポール PH が地面に垂直に立っている。ポールより離れた 2 地点 A，B とポールの先端 P について，

$AB=20$ (m)，$\angle PAB=60^\circ$，$\angle PBA=75^\circ$，

$\angle PBH=45^\circ$ であった。ポールの高さ PH を求めたい。



△PAB において

$$\angle APB=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$$

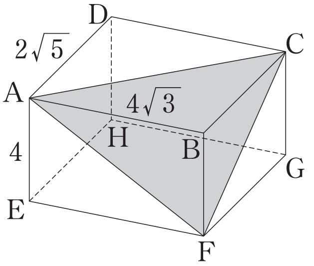
正弦定理より $\frac{BP}{\sin60^\circ}=\frac{20}{\sin45^\circ}$

$$BP=20\div\sin45^\circ\times\sin60^\circ=20\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{6}$$

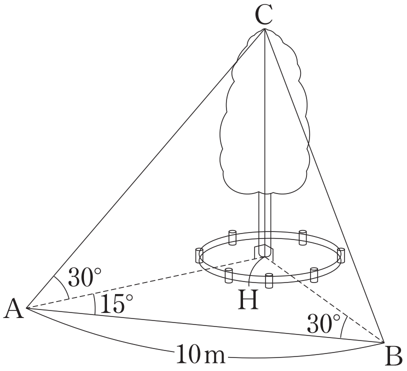
よって直角三角形 PBH において

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PB}\sin 45^\circ=10\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{3}\ (\mathrm{m})$$

4　(1)　右の図のように，$AB=4\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{5}$，$AE=4$ である直方体 ABCD−EFGH がある。△AFC の面積を求めよ。



(2)　右の図において，木の周りが柵で囲まれている。木より離れた 2 地点 A，B と木の先端 C について，$AB=10$ (m)，$\angle CAH=30^\circ$，$\angle HAB=15^\circ$，$\angle HBA=30^\circ$ であった。このとき木の高さ CH を求めよ。



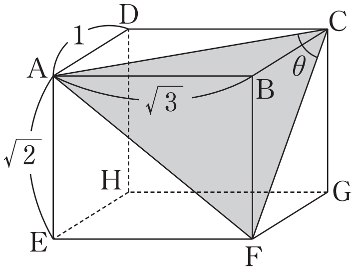
Point Pickup

空間図形への応用

空間図形に含まれる三角形に注目し，辺の長さや面積を求める。

第14講　PART4 確認問題

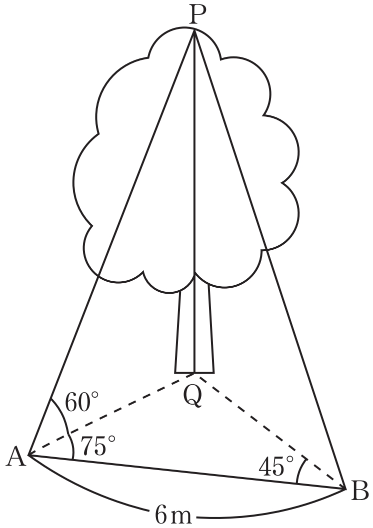
1 次の図のように，AB＝$\sqrt{3}$，AD＝1，AE＝$\sqrt{2}$ である直方体 ABCD-EFGH がある。



∠ACF＝θ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ であるから，

△AFC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ウエ}}}{\boxed{オ}}$ である。

2 次の図のように，地面に垂直に立つ木 PQ と，地面の点 A，B があり，AB＝6 (m)，∠PAQ＝60°，∠QAB＝75°，∠QBA＝45° である。



このとき，木 PQ の高さは $\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ m である。

第15講　データの分析

PART1　データの整理と代表値

要点①　データの整理

「変量」… 身長，気温，テストの点数のように，人や物の特性を数量的に表すもの

「データ」… 変量の観測値や測定値などの集まり

データを整理する方法として，「度数分布表」や「ヒストグラム」がある。

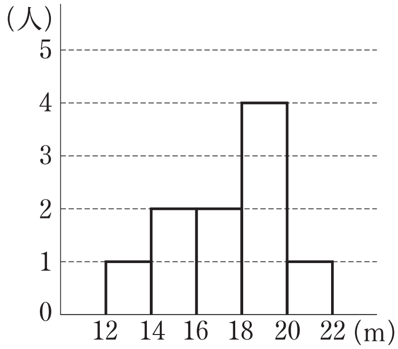
例　次のデータは，あるクラスの生徒 10 人のハンドボール投げ (m) の結果である。

13，21，15，18，18，16，17，15，19，18 (m)

度数分布表

階級 (m)	度数 (人)
12 以上 14 未満	
14　～　16	
16　～　18	
18　～　20	
20　～　22	
計	10

ヒストグラム



階級の幅は　　m

14m 以上 16m 未満の階級の相対度数は　　= 0.2

要点②　データの代表値

「代表値」… データ全体の特徴を 1 つの数値で表したもの

主な代表値として「　　　」「　　　」「　　　」がある。

「平均値」… 変量 x についてのデータが，n 個の値 x_1，x_2，……，x_n であるとき，

これらの和を値の個数 n で割ったもの。「　」で表す。

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$$

「中央値」… データを値の大きさの順(小さい順，大きい順)に並べたとき，

中央の位置にくる値。メジアンともいう。

データの個数が偶数のときは，中央に並ぶ 2 つの値の平均値。

「最頻値」… データにおいて，最も個数の多い値。モードともいう。

データが度数分布表に整理されているときは，度数が最も大きい

階級の階級値(階級の中央の値)を最頻値とする。

例 データ

13，21，15，18，18，16，17，15，19，18 (m)

について，代表値を求める。

このデータの平均値は

$$\overline{x} = \qquad\qquad = \frac{170}{10} = 17.0 \text{ (m)}$$

このデータを小さい順に並べると

13，15，15，16，17，18，18，18，19，21

よって，このデータの中央値は　　　＝17.5 (m)

このデータの最頻値は　　m

※右表のように，度数分布表に整理されているとき，

最頻値は　　　＝19 (m)

＜度数分布表＞

階級 (m)	度数 (人)
12 以上 14 未満	1
14 ～ 16	2
16 ～ 18	2
18 ～ 20	4
20 ～ 22	1
計	10

平均値は極端に離れた値の影響を受けやすく，中央値は極端に離れた値の影響を受けにくい。

1 (1) 次のデータの平均値，中央値をそれぞれ求めよ。

(i) 32，40，31，45，80

(ii) 45，41，39，50，44，45

(2) 右の表は，あるクラスの生徒 27 人のソフトボール投げの結果である。

(i) 中央値が含まれる階級を求めよ。

(ii) 最頻値を求めよ。

階級 (m)	度数 (人)
12 以上 14 未満	2
14 ～ 16	4
16 ～ 18	9
18 ～ 20	5
20 ～ 22	7
計	27

Point Pickup

代表値（平均値，最頻値，中央値）

平均値 … $\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)$

平均値は，極端に離れた値の影響を受けやすい

最頻値 … 最も個数の多い値。

度数分布表に整理されているときは，度数が最も大きい階級の階級値。

中央値 … 大きさの順に並べたとき，中央の位置にくる値。

データの個数が偶数のときは，中央に並ぶ 2 つの値の平均値。

中央値は，極端に離れた値の影響を受けにくい。

第15講 PART1 確認問題

1 次の８個のデータがある。

1，2，4，5，5，8，10，13

平均値は [ア] である。

2 次のような(A)，(B) 2 つのデータがある。

(A)　1，2，5，8，9，11，13

(B)　3，3，6，7，11，14，14，15

(A)の中央値は [イ]，

(B)の中央値は [ウ] である。

3 右のような度数分布表で表される 25 個のデータがある。

中央値が含まれる階級は

[エ] 以上 [オ] 未満

である。

階級	度数
以上　未満	
1 ～ 3	2
3 ～ 5	4
5 ～ 7	7
7 ～ 9	9
9 ～ 11	3
計	25

4 右のような度数分布表で表される 25 個のデータがある。

最頻値は [カ] である。

階級	度数
以上　未満	
1 ～ 3	2
3 ～ 5	4
5 ～ 7	7
7 ～ 9	9
9 ～ 11	3
計	25

PART2 データの散らばり

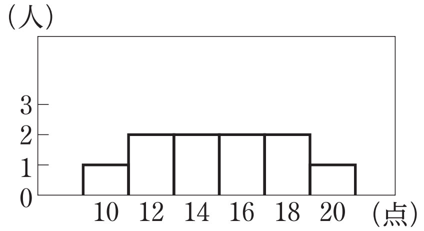
要点 ① データの範囲

「範囲」… データの最大値から最小値を引いた差

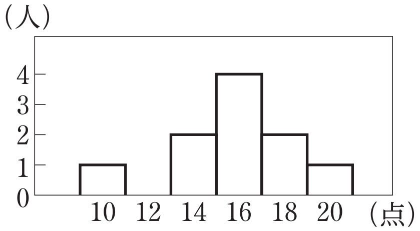
範囲が大きいとデータの散らばりの度合いが大きいと考えられる。

例 次の 2 つの図は，あるクラスの 10 人に 2 つのゲーム A，B を行い，その得点をヒストグラムに表したものである。

ゲーム A



ゲーム B



ゲーム A，ゲーム B ともに，範囲は 　－　 ＝10(点)である。

上の例のゲーム A とゲーム B について，範囲からは「散らばりの度合いに違いはない」と考えられる。最大値や最小値に極端に離れた値があると，範囲はそれに大きく影響を受ける。

要点 ② 四分位数と四分位範囲

「四分位数」… データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値

四分位数は，小さい方から第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数といい，順に Q_1，Q_2，Q_3 で表す。第 2 四分位数 Q_2 は中央値である。

例 データ　1，2，3，4，5，6，7，8，9 について

$Q_2 =$ 　，$Q_1 =$ 　　　$= 2.5$，$Q_3 =$ 　　　$= 7.5$

データ　1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 について

$Q_2 =$ 　　　$= 5.5$，$Q_1 =$ 　，$Q_3 =$

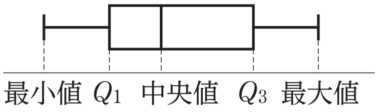
「四分位範囲」… 第 3 四分位数 Q_3 から第 1 四分位数 Q_1 を引いた差 $Q_3 - Q_1$

四分位範囲は，中央約50％のデータの範囲，つまりデータ全体の散らばりの度合いを表している。よって，極端に離れた値の影響を受けにくい。また，データの値が中央値(Q_2)の周りに集中しているほど，四分位範囲は小さい傾向にあり，逆に四分位範囲が大きいほど，散らばりの度合いが大きいと考えられる。

※四分位範囲を2で割った値 $\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$ を「四分位偏差」という。

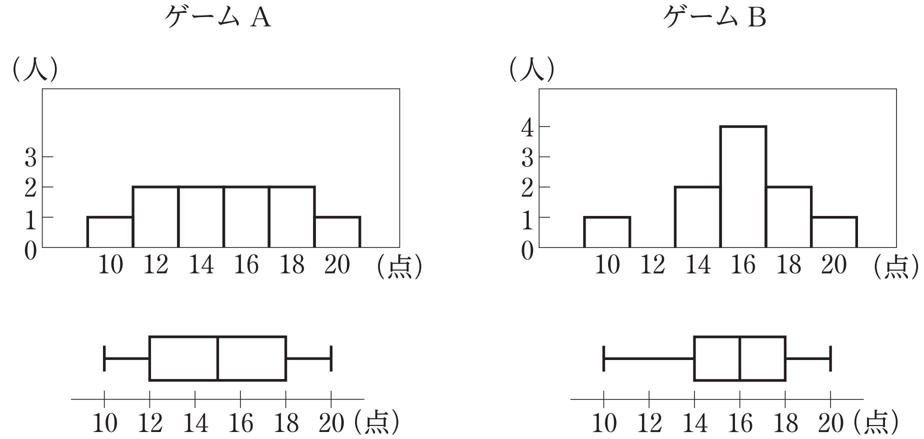
要点③ 箱ひげ図

「箱ひげ図」… 最小値，第1四分位数，中央値，第3四分位数，最大値を，箱と線(ひげ)を用いて1つの図で表したもの。



※箱ひげ図は縦に表すこともある。

例 次の図は，あるゲームA，Bの得点の結果をヒストグラムと箱ひげ図で表したものである。



箱ひげ図から，データの広がりや偏りなど，分布のおおまかな様子がわかる。よって，箱ひげ図は複数のデータの分布を比較することに適している。

2 次のデータは，書店 A，B におけるある本の 1 日の販売数 10 日分を，小さい順に並べたものである。

書店 A … 0，0，3，3，4，5，7，8，8，9

書店 B … 2，3，5，5，6，7，7，8，8，9

(1) それぞれのデータの四分位数を求めよ。

(2) ２つのデータの箱ひげ図を並べてかけ。

(3) それぞれのデータの範囲，および四分位範囲を求め，それらをもとに，データの散らばりの度合いを比較せよ。

Point Pickup

散らばりの度合い

範囲 …（最大値）−（最小値）

四分位範囲 …（第 3 四分位数 Q_3）−（第 1 四分位数 Q_1）

範囲の大きさや四分位範囲の大きさから，複数のデータの散らばりの度合いを比較することができる。範囲は極端に離れた値の影響を受けやすく，四分位範囲は極端に離れた値の影響を受けにくい。

第15講 PART2 確認問題

次のような 10 個の値からなる 2 つのデータ(A)，(B)がある。

(A)　2，2，4，5，5，5，6，6，6，7

(B)　1，1，3，3，3，5，6，7，7，9

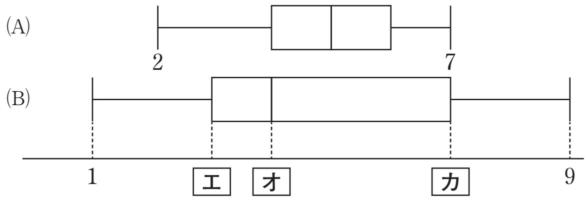
1 (A)について，

第 1 四分位数は [ア]，

第 2 四分位数は [イ]，

第 3 四分位数は [ウ] である。

2 (A)，(B) 2 つのデータの箱ひげ図を作ると，次のようになる。



3 (B)について，

データの範囲は [キ]，

四分位範囲は [ク] である。

4　(A)，(B) 2 つのデータを比較したとき，正しいものを，次の①～③から選べ。 ケ

① (A)のデータの方が散らばりの度合いが大きい。

② (B)のデータの方が散らばりの度合いが大きい。

③ 2 つのデータの散らばりの度合いはほぼ等しい。

[MEMO]

PART3 分散と標準偏差

要点① 偏差と分散，標準偏差

ここでは，データの値すべてに関してその散らばり度合いをみる方法の 1 つとして，平均値との差を考える。平均値との差が大きいほど，その値は平均値から離れている。

変数 x についてのデータの n 個の値を x_1，x_2，……，x_n とし，その平均値を $\overline{x}$ とする。各値から平均値を引いた差 $x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，……，$x_n-\overline{x}$ を，それぞれ平均値からの「　　　」という。値が平均値より大きければ，偏差は　　であり，平均値より小さければ，偏差は　　である。

偏差の平均値を求めると

$$\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})\}=\frac{1}{n}\{(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)-\overline{x}\times n\}$$

$$=\overline{\quad}-\overline{x}=$$

となるから，偏差の平均値を用いて散らばりの度合いを見ることはできない。

ここで，偏差を「　　　」した値を考えると，その値は常に　　　　となり，データの値が平均値から離れるほどその値は　　　　なる。よって，偏差の 2 乗の平均値の大小はデータの散らばりの度合いの大小を表す 1 つの指標となると考えられる。この偏差の 2 乗の平均値を「　　　」といい，「　　」で表す。

変量 x の単位が例えば「点」であるとき，変量 x の平均値，および偏差の単位は「点」であるが，偏差の 2 乗の単位は「点^2」であるから，その平均値である分散の単位も「点^2」である。そこで，「分散の　　　　　　　　」をとることで，変量 x の単位に合わせることができる。この「分散の正の平方根」を「　　　　　」といい，「　　」で表す。

分散と標準偏差

分散　$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$

標準偏差　$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}}$

例　5 人の生徒の小テストの得点 x が右の表で与えられているとき，分散と標準偏差を求める。

x	6	10	8	7	4
$x-\overline{x}$					
$(x-\overline{x})^2$					

平均値は $\overline{x}=\frac{1}{5}(6+10+8+7+4)=\frac{35}{5}=7$（点）

分散は $s^2=\frac{1}{5}\{\qquad\qquad\qquad\qquad\}=\frac{1}{5}(1+9+1+0+9)=\frac{20}{5}=4$

標準偏差は $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$（点）

データの値が平均値の周りに集中しているほど，分散や標準偏差は小さくなる。よって，複数のデータの標準偏差を比較することによって，散らばりの度合いの比較をすることができる。

※データの中に，他の値と極端に離れた値がある場合，その値の偏差の2乗の値が極端に大きくなり，分散や標準偏差の値も大きくなる。

要点② 分散の式の変形

分散 s^2 は，次のように変形することができる。

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

$$=\frac{1}{n}[\{x_1{}^2-2x_1\overline{x}+(\overline{x})^2\}+\{\qquad\qquad\qquad\}+\cdots\cdots+\{x_n{}^2-2x_n\overline{x}+(\overline{x})^2\}]$$

$$=\frac{1}{n}\{(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-2\overline{x}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+\quad(\overline{x})^2\}$$

$$=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-2\overline{x}\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)+(\overline{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-2\overline{x}\cdot\quad+(\overline{x})^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-(\overline{x})^2$$

よって，次のことがいえる。

変量 x の分散

$s^2=(x^2$ の平均値$)-(x$ の平均値$)^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$

例 5人の生徒の小テストの得点 x が右の表で与えられているとき，分散 s^2 を求める。

x	6	10	8	7	4

$$\overline{\quad}=\frac{1}{5}(\quad+\quad+\quad+\quad+\quad)=\frac{265}{5}=53$$

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(6+10+8+7+4)=\frac{35}{5}=7$$

よって　$s^2=\quad-\quad=4$

3 次のデータは，8 人の生徒が 2 か月の間に読んだ本の冊数 x(冊)である。

1，3，6，5，8，1，6，2

(1) このデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

(2) このデータの分散 s^2 を求めよ。

(3) このデータの標準偏差 s を求めよ。

Point Pickup

分散と標準偏差

変量 x のデータの n 個の値が x_1，x_2，……，x_n，その平均値を $\overline{x}$ とするとき

分散　$s^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$　……(偏差)^2 の平均値

標準偏差　$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}}$　……$\sqrt{(分散)}$

分散は

$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$　……　(x^2 の平均値)−(x の平均値)^2

と計算することができる。

※データの中に他の値と極端に離れた値がある場合，分散や標準偏差の値も大きくなる。

第15講 PART3 確認問題

次の 8 個のデータ x がある。

1，2，2，3，4，6，7，7

1 このデータの平均値 $\overline{x}$ は ア である。

2 このデータの分散 s^2 は イ である。

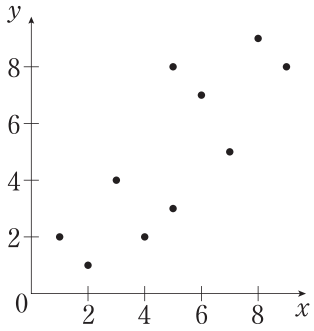
3 このデータの標準偏差 s は $\sqrt{\text{ウ}}$ である。

PART4 データの相関

要点① 散布図と相関関係

ある 2 つの変量の間に関係があるかを知りたいとき，その 2 つのデータの値を座標とする点をとり，視覚化する方法がある。

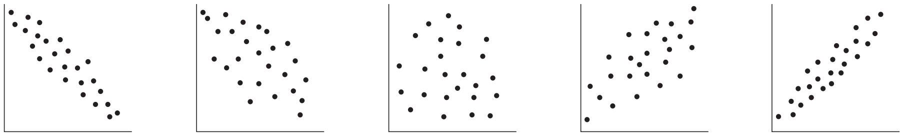
x	8	4	3	5	2	1	6	9	5	7
y	9	2	4	8	1	2	7	8	3	5



右の図は，上の表の変量 x，y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとったものである。
このように，2 つの変量からなるデータを点として座標平面上に図示したものを「　　　　　」という。

2 つの変量からなるデータにおいて，一方が増えると他方も増える傾向にあるとき，2 つの変量には「　　の相関がある」という。また，一方が増えると他方が減る傾向にあるとき，2 つの変量には「　　の相関がある」という。正の相関も負の相関もみられないとき，「相関がない」という。

散布図において，点の分布が直線に近づくほど「相関が　　　」といい，広く散らばっているほど「相関が　　　」という。



負の相関（強い）　負の相関（弱い）　相関がない　正の相関（弱い）　正の相関（強い）

要点② 相関係数

ある 2 つの変量の間に関係があるかを知りたいとき，その 2 つのデータの値を用いて相関を 1 つの数値で表す方法がある。

2 つの変量 x，y からなる n 個のデータの組 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，……，$(x_n,\ y_n)$ について，x の偏差と y の偏差の積 $(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$ の平均値を「　　　　　」といい，「　　」と表す。

共分散

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

x と y に正の相関があるときは，共分散は正の値をとり，負の相関があるときは，共分散は負の値をとる。また，相関関係がないときは，共分散は 0 に近い値になる。

共分散は変量 x，y の単位の取り方や散らばり具合に影響を受けるため，相関の強さをみることはできない。相関関係の強弱をみるために，共分散 s_{xy} を，x，y の標準偏差 s_x，s_y の積 $s_x s_y$ で割ったものを，x，y の「　　　　　　」といい，「　」で表す。

相関係数

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

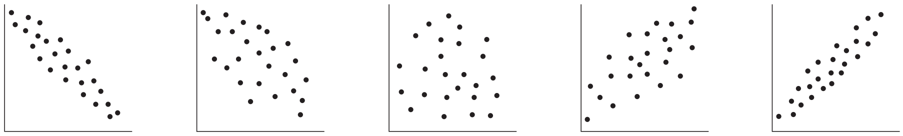
相関係数 r のとり得る値の範囲は $-1 \leqq r \leqq 1$ であり

・r の値が 1 に近いほど強い正の相関がある

・r の値が -1 に近いほど強い負の相関がある

・r の値が 0 に近づくほど相関は弱い

ことが知られている。



負の相関（強い）　負の相関（弱い）　相関がない　正の相関（弱い）　正の相関（強い）

$r=-1$　$r=0$　$r=1$

※データの中に，他の値と極端に離れた値がある場合，相関係数の値はその影響を受けやすい。

※ 2 つの変量の間に相関関係があっても，それらの間に因果関係があるとは限らない。

例えば，ある英語と数学のテストの得点に正の相関が見られたとしても，英語の得点を高くすれば数学の得点が高くなる，または数学の得点を高くすれば英語の得点が高くなる，といった因果関係を必ずしも意味するものではない。

4 次の表は，2 つの変量 x，y からなるデータである。

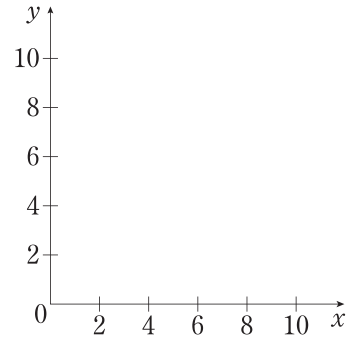
x	3	2	7	6	8	4	9	1	3	7
y	8	9	5	4	1	6	2	7	5	3

(1)　散布図をかき，x，y の間に相関があるか調べよ。また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関があると考えられるかを答えよ。

(2)　(1)の散布図から，このデータの x と y の相関係数 r に最も近いものを次の①～④から 1 つ選べ。

①　-0.31　　②　-0.88　　③　0.25　　④　0.92

〈散布図〉



Point Pickup

散布図と相関関係

散布図における点の分布が

右上がりの直線に近い　→　正の相関がある

右下がりの直線に近い　→　負の相関がある

どちらの傾向もない　→　相関がない

相関係数 r

相関係数 r の値が

1 に近い　→　強い正の相関がある

-1 に近い　→　強い負の相関がある

0 に近い　→　相関がない(弱い)

第15講　PART4 確認問題

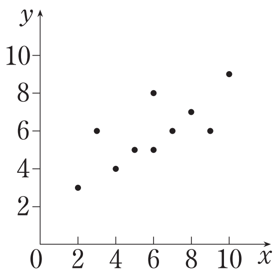
次の表は，2 つの変量 x，y からなるデータである。

x	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10
y	3	6	4	5	5	8	6	7	6	9

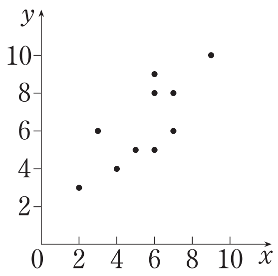
1

散布図を，次の①，②のうちから選べ。 ア

①



②



また，x と y の間にどんな関係があるといえるか。次の①～③のうちから選べ。 イ

① 正の相関があるといえる

② 負の相関があるといえる

③ 相関関係はない

2

散布図から，このデータの x と y の相関係数に最も近い値を，次の①～④のうちから選べ。 ウ

① -0.3　　② -0.7

③ 0.3　　④ 0.7

PART5 外れ値

要点① 外れ値

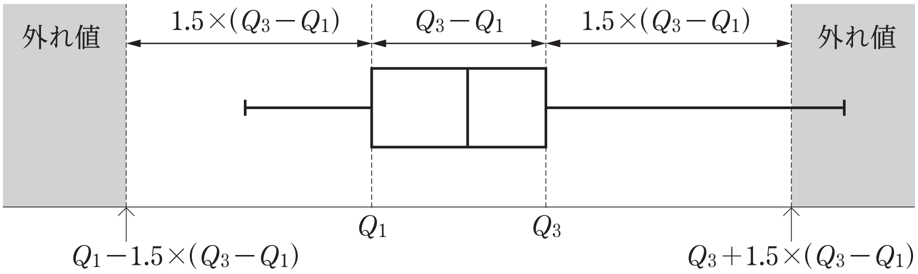
次のデータは，あるゲームの７回分の得点の記録を小さい順に並べたものである。

3，4，5，5，6，7，19（点）

平均値は７点であり，７回中６回の記録が平均点以下である。これは，19点という記録が他の記録と比べて極端に大きいことによるものである。データの中に，他の値と極端にかけ離れた値が含まれる場合，その値を「　　　　　」という。

次のような値を外れ値と定める方法がある。

データの第１四分位数を Q_1，第３四分位数を Q_3 とするとき
- ・$Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以下の値
- ・$Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以上の値



つまり，データの第１四分位数または第３四分位数から，四分位範囲の1.5倍以上外側に離れた値を外れ値とみなす方法である。

前述のデータにおいて，$Q_1=$　，$Q_3=$　，四分位範囲 $Q_3-Q_1=$　より

$Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)=\quad-1.5\times\quad=-0.5$

$Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)=\quad+1.5\times\quad=11.5$

よって，外れ値は -0.5 点以下，または11.5点以上の値であり，19点という記録は外れ値とみなすことができる。

外れ値を含むデータにおける範囲，平均値，分散および標準偏差，相関係数は，外れ値に大きく影響を受ける。

※測定ミスや，入力ミスなどによって生じた値を「異常値」といい，その値には価値がなく，除外して考えることが望ましい。外れ値が異常値ではない場合は，その外れ値の観測対象に，様々な問題解決や改善の手がかりを見いだせる可能性がある。

【MEMO】

5 次のデータ A は, あるゲームの 10 回分の得点の記録を, 値の小さい順に並べたものである。

1, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 10, 13

(1) データ A の平均値, および四分位数を求めよ。

(2) 次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1, 第 3 四分位数を Q_3 とするとき,
> $Q_1-1.5(Q_3-Q_1)$ 以下の値または $Q_3+1.5(Q_3-Q_1)$ 以上の値

データ A において, 外れ値である値を求めよ。また, データ A から外れ値である値を除いたデータにおいて, 平均値を求めよ。

Point Pickup

外れ値

データの中に, 他の値と極端にかけ離れた値が含まれる場合, その値を外れ値という。外れ値を含むデータにおける範囲, 平均値, 分散および標準偏差, 相関係数は, 外れ値に大きく影響を受ける。

第15講　PART5 確認問題

次のデータAは，生徒10人について，1学期の間に図書館で借りた本の冊数を調べ，値の小さい順に並べたものである。

[データA]

3，4，4，7，8，10，10，12，23，29(冊)

1　データAの平均値は［アイ］冊である。

また，第1四分位数は［ウ］冊

　　第2四分位数は［エ］冊

　　第3四分位数は［オカ］冊

である。

2　次のような値を外れ値と定める。

> データの第1四分位数を Q_1，第3四分位数を Q_3 とするとき，
>
> 　　$Q_1-1.5(Q_3-Q_1)$ 以下の値
>
> または　$Q_3+1.5(Q_3-Q_1)$ 以上の値

データAにおいて，外れ値である値は［キ］。

また，データAから外れ値である値を除いたデータにおいて，平均値は［ク］冊である。

ただし，［キ］は，次の①～④のうちから選べ。

① ない　　② 29

③ 23と29　　④ 3と29

PART6 仮説検定

要点① 仮説検定

「仮説検定」… ある仮説を立てて，それが成り立つかどうかを統計的に検証する手法

仮説検定の主な流れは以下の通り。

Ⅰ　主張したい仮説を立てる

Ⅱ　Ⅰに「　　　　」仮説を立てる

Ⅲ　Ⅱで立てた仮説が正しいかどうかを統計的に検証し

(i)「　　　　　　　」と判断できる場合　→　Ⅰで立てた仮説が　　　　　といえる

(ii)「　　　　　　　」とは判断できない場合　→ Ⅰで立てた仮説が

Ⅲにおける検証方法として，Ⅱの仮説のもとで実際にその事象が起こる「　　　」を計算し，その結果が

あらかじめ定めた基準となる確率より「　　　　」

→　その事象が起こることは極めて珍しい，ほとんど起こり得ない

→　Ⅱで立てた仮説が誤っていると判断できる

あらかじめ定めた基準となる確率より「　　　　」

→　その事象が起こることは珍しいとはいえない，起こり得ないとはいえない

→　Ⅱで立てた仮説が誤っているとは判断できない

とする。

あらかじめ定める基準となる確率は，0.05（5%）または 0.01（1%）と定めることが多い。

例　A 校の野球部と B 校の野球部は，互角の実力といわれている。この 2 校で対戦した練習試合の直近 5 試合の結果は，A 校の 5 連勝であった。この結果から，実際には A 校の野球部の方が B 校の野球部より強いのでは，という疑問が浮かんだとする。

Ⅰ　「A 校の野球部の方が B 校の野球部より強い」という仮説を立てる

Ⅱ　「A 校の野球部と B 校の野球部は互角の実力」という仮説を立てる。

すなわち，A 校の野球部が B 校の野球部に勝つ確率は　　とする。

Ⅲ　基準となる確率を 0.05 と定める。

Ⅱの仮説のもとで，「A 校が 5 連勝する」確率を求めると，$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \fallingdotseq 0.03$ であり，基準となる確率 0.05 より　　　　　。よって，Ⅱで立てた仮説が誤っていると　　　　　　　　。
したがって，Ⅰで立てた仮説「A 校の野球部の方が B 校の野球部より強い」は　　　　　　といえる。

※基準となる確率より大きい，すなわちⅡで立てた仮説が誤っているとは判断できない場合，Ⅱで立てた仮説が正しいことを意味しているわけではない。その結果，Ⅰで立てた仮説が正しいとも誤っているとも判断できない。

6　あるコインを 6 回投げたところ, 表が 5 回出た。この結果から, このコインは表が出やすい, と判断してよいか。基準となる確率を 0.05 として, 仮説検定を行うことによって考察せよ。ただし，表と裏が出る確率がともに 0.5 であるコインを 6 回投げて表が出た回数を記録する操作を 1000 セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	0	1	2	3	4	5	6	計
度数	16	90	229	320	235	96	14	1000

Point Pickup

仮説検定の手順

①　主張したい仮説を立てる

②　①に反する仮説を立てる

③　②で立てた仮説が正しいかどうかを，実際にその事象が起こる確率を計算し，あらかじめ定めた基準となる確率と比較して判断する。

②の仮説が誤っていると判断できる場合　→　①で立てた仮説が正しいといえる

②の仮説が誤っているとは判断できない場合　→　①で立てた仮説が正しいとはいえない(誤っているともいえない)

第15講 PART6 確認問題

1 ある学校で給食の改善を行い，無作為に選んだ生徒 30 人にアンケートをとったところ，20 人が以前よりおいしいと答えた。この結果から，以前に比べて給食はおいしくなったと判断してよいか。基準となる確率を 0.05 として，仮説検定を行うことによって考察せよ。ただし，コインを 30 回投げて表の出る回数を記録する実験を 500 セット行ったところ，以下の表のようになった。この結果を用いよ。

表の回数	5	6	7	8	9	10	11	12
度数	1	1	2	4	6	13	27	40

13	14	15	16	17	18	19	20
55	67	75	65	55	38	22	12

21	22	23	24	25	計
7	5	3	1	1	500

ア

① 給食はおいしくなったと判断してよい。

② 給食はおいしくなったとは判断できない。

第 1 講　式の計算と展開

PART1　単項式と多項式

1　(1)　次の単項式で，[　] 内の文字に着目したときの，係数と次数をいえ。

$-3ax^2y^3$　　[a]，[x]

(2)　次の多項式で，[　] 内の文字に着目したとき，何次式であるかをいえ。また，それぞれの文字に着目したときの定数項をいえ。

$3x^2+x-2y^3+4$　　[x]，[y]

[解答]

(1)　a に着目すると $-3x^2y^3\times a$　　よって，係数は $-3x^2y^3$，次数は 1

x に着目すると $-3ay^3\times x^2$　　よって，係数は $-3ay^3$，次数は 2

(2)　x に着目すると $3x^2+x+(-2y^3+4)$　　よって，2 次式　　定数項は $-2y^3+4$

y に着目すると $-2y^3+(3x^2+x+4)$　　よって，3 次式　　定数項は $3x^2+x+4$

PART2 整式の整理

2 (1) 次の整式を整理せよ。

$$x^2+3-x^3+5x-3x^2-2x^3+2$$

(2) 次の整式を，[　] 内の文字に着目して整理せよ。

$$2x^2+4xy-5x+3y+7 \qquad [x],\ [y]$$

[解答]

(1) $x^2+3-x^3+5x-3x^2-2x^3+2$

$=-x^3-2x^3+x^2-3x^2+5x+3+2$

$=(-1-2)x^3+(1-3)x^2+5x+(3+2)$

$=-3x^3-2x^2+5x+5$

(2) x に着目すると

$2x^2+4xy-5x+3y+7$

$=2x^2+4yx-5x+3y+7$

$=2x^2+(4y-5)x+(3y+7)$

y に着目すると

$2x^2+4xy-5x+3y+7$

$=4xy+3y+2x^2-5x+7$

$=(4x+3)y+\left(2x^2-5x+7\right)$

PART3 整式の加法と減法，乗法

3 (1) $A=x^2+x+3$，$B=2x^2-x-5$ のとき，$A+B$，$A-B$，$2A-3B$ を計算せよ。

(2) 次の計算をせよ。

(i) $2a^2\times(-3a^3)^2$　　(ii) $(-2x^2y^4)^3\times5x^2y$

(3) 次の計算をせよ。

(i) $2x(x^2-3x)$　　(ii) $(x^2-3xy-2y)\times(-xy)$

[解答]

(1) $A+B=(x^2+x+3)+(2x^2-x-5)$

$=x^2+x+3+2x^2-x-5$

$=3x^2-2$

$A-B=(x^2+x+3)-(2x^2-x-5)$

$=x^2+x+3-2x^2+x+5$

$=-x^2+2x+8$

$2A-3B=2(x^2+x+3)-3(2x^2-x-5)$

$=2x^2+2x+6-6x^2+3x+15$

$=-4x^2+5x+21$

(2)(i) $2a^2\times(-3a^3)^2=2a^2\times(-3)^2(a^3)^2=2a^2\times9a^{3\times2}=2a^2\times9a^6=18\times a^{2+6}=18a^8$

(ii) $(-2x^2y^4)^3\times5x^2y=(-2)^3(x^2)^3(y^4)^3\times5x^2y=-8x^6y^{12}\times5x^2y=-40x^8y^{13}$

(3)(i) $2x(x^2-3x)=2x\cdot x^2+2x\cdot(-3x)=2x^3-6x^2$

(ii) $(x^2-3xy-2y)\times(-xy)=x^2\cdot(-xy)+(-3xy)\cdot(-xy)+(-2y)\cdot(-xy)$

$=-x^3y+3x^2y^2+2xy^2$

PART4 展開

4 (1) 次の式を展開せよ。

(i) $(2x+1)^2$　(ii) $(3x-2y)^2$

(iii) $(3x+5y)(3x-5y)$　(iv) $(x-4y)(x-6y)$

(2) 次の式を展開せよ。

(i) $(2x+3)(3x+4)$　(ii) $(x+5y)(3x-7y)$

(3) 次の式を展開せよ。

(i) $(x-y-8)(x-y+2)$　(ii) $(a+b+c)^2$

[解答]

(1)(i) $(2x+1)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot1+1^2=4x^2+4x+1$

(ii) $(3x-2y)^2=(3x)^2-2\cdot3x\cdot2y+(2y)^2=9x^2-12xy+4y^2$

(iii) $(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2=9x^2-25y^2$

(iv) $(x-4y)(x-6y)=x^2+(-4y-6y)x+(-4y)\cdot(-6y)=x^2-10xy+24y^2$

(別解)

$(x-4y)(x-6y)=x^2+(-4-6)xy+(-4)\cdot(-6)y^2=x^2-10xy+24y^2$

(2)(i) $(2x+3)(3x+4)=2\cdot3x^2+(2\cdot4+3\cdot3)x+3\cdot4=6x^2+17x+12$

(ii) $(x+5y)(3x-7y)=3x^2+(-7y+15y)x+5y\cdot(-7y)=3x^2+8xy-35y^2$

(別解)

$(x+5y)(3x-7y)=3x^2+(-7+15)xy-35y^2=3x^2+8xy-35y^2$

(3)(i) $x-y=A$ とおくと

$(x-y-8)(x-y+2)=(A-8)(A+2)=A^2-6A-16$

$=(x-y)^2-6(x-y)-16$

$=x^2-2xy+y^2-6x+6y-16$

(ii) $a+b=A$ とおくと

$(a+b+c)^2=(A+c)^2=A^2+2Ac+c^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

第 2 講　因数分解

PART1　共通因数

1　(1)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$15x^3-5x^2y$

(ii)　$6a^2bc-9ab^2c+12abc^2$

(2)　次の式を因数分解せよ。

(i)　$(a-4)x+(a-4)y$

(ii)　$(a-b)x^2+(b-a)y$

[解答]

(1)(i)　$15x^3-5x^2y=5x^2\cdot 3x-5x^2\cdot y=5x^2(3x-y)$

(ii)　$6a^2bc-9ab^2c+12abc^2=3abc\cdot 2a-3abc\cdot 3b+3abc\cdot 4c=3abc(2a-3b+4c)$

(2)(i)　$a-4=A$ とおくと

$$(a-4)x+(a-4)y=Ax+Ay=A(x+y)=(a-4)(x+y)$$

(ii)　$a-b=A$ とおくと

$$\begin{aligned}(a-b)x^2+(b-a)y&=(a-b)x^2-(a-b)y\\&=Ax^2-Ay\\&=A(x^2-y)\\&=(a-b)(x^2-y)\end{aligned}$$

PART2 因数分解の公式

2 (1) 次の式を因数分解せよ。

(i) $x^2+12xy+36y^2$　　(ii) $9x^2-48xy+64y^2$

(iii) $25x^2-49$　　(iv) $36x^2-4y^2$

(2) 次の式を因数分解せよ。

(i) x^2+6x+5　　(ii) x^2+x-6

(iii) $x^2-8xy+15y^2$　　(iv) $x^2-7xy-30y^2$

[解答]

(1)(i) $x^2+12xy+36y^2=x^2+2\cdot x\cdot 6y+(6y)^2=(x+6y)^2$

(ii) $9x^2-48xy+64y^2=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 8y+(8y)^2=(3x-8y)^2$

(iii) $25x^2-49=(5x)^2-7^2=(5x+7)(5x-7)$

(iv) $36x^2-4y^2=4(9x^2-y^2)=4\{(3x)^2-y^2\}=4(3x+y)(3x-y)$

(2)(i) $x^2+6x+5=(x+1)(x+5)$

(ii) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

(iii) $x^2-8xy+15y^2=(x-3y)(x-5y)$

(iv) $x^2-7xy-30y^2=(x-10y)(x+3y)$

PART3 たすきがけによる因数分解

3 次の式を因数分解せよ。

(1) $5x^2+7x+2$　　(2) $4x^2-8x+3$

(3) $2x^2+x-6$　　(4) $6x^2+5x-6$

(5) $12x^2-13xy-4y^2$

[解答]

(1) $5x^2+7x+2=(5x+2)(x+1)$

5	2	→	2
1	1	→	5
			7

(2) $4x^2-8x+3=(2x-1)(2x-3)$

2	-1	→	-2
2	-3	→	-6
			-8

(3) $2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$

2	-3	→	-3
1	2	→	4
			1

(4) $6x^2+5x-6=(2x+3)(3x-2)$

2	3	→	9
3	-2	→	-4
			5

(5) $12x^2-13xy-4y^2=(4x+y)(3x-4y)$

4	$1y$	→	$3y$
3	$-4y$	→	$-16y$
			$-13y$

PART4 いろいろな因数分解

4 (1) 次の式を因数分解せよ。

(i) $(x-y)^2-4(x-y)-12$　　(ii) x^4+3x^2-28

(2) 次の式を因数分解せよ。

(i) $ab-a+2b-2$　　(ii) $x^2+xy+x+2y-2$

[解答]

(1)(i) $x-y=X$ とおくと

$$(x-y)^2-4(x-y)-12=X^2-4X-12$$
$$=(X-6)(X+2)$$
$$=(x-y-6)(x-y+2)$$

(ii) $x^2=X$ とおくと

$$x^4+3x^2-28=(x^2)^2+3x^2-28$$
$$=X^2+3X-28$$
$$=(X+7)(X-4)$$
$$=(x^2+7)(x^2-4)$$
$$=(x^2+7)(x+2)(x-2)$$

(2)(i) a に着目して

$$ab-a+2b-2=(b-1)a+2b-2$$
$$=(b-1)a+2(b-1)$$
$$=(b-1)(a+2)$$
$$=(a+2)(b-1)$$

(ii) y に着目して

$$x^2+xy+x+2y-2=(x+2)y+x^2+x-2$$
$$=(x+2)y+(x+2)(x-1)$$
$$=(x+2)(y+x-1)$$
$$=(x+2)(x+y-1)$$

第 3 講　実数

PART1　実数

1　(1)　次の分数を循環小数の表し方で書け。

(i)　$\dfrac{2}{3}$　　(ii)　$-\dfrac{7}{33}$

(2)　次の循環小数を分数で表せ。

(i)　$0.\dot{2}$　　(ii)　$0.\dot{3}4\dot{2}$

[解答]

(1)(i)　2÷3 を計算して $\dfrac{2}{3}=0.666\cdots\cdots=0.\dot{6}$

(ii)　7÷33 を計算して $-\dfrac{7}{33}=-0.2121\cdots\cdots=-0.\dot{2}\dot{1}$

(2)(i)　$x=0.\dot{2}$ とおくと，右の計算より

$$9x=2$$

$$x=\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{rr} & 10x=2.222\cdots\cdots \\ -) & x=0.222\cdots\cdots \\ \hline & 9x=2 \end{array}$$

(ii)　$x=0.\dot{3}4\dot{2}$ とおくと，右の計算より

$$999x=342$$

$$x=\frac{342}{999}=\frac{38}{111}$$

$$\begin{array}{rr} & 1000x=342.342342\cdots\cdots \\ -) & x=\quad 0.342342\cdots\cdots \\ \hline & 999x=342 \end{array}$$

PART2 絶対値

2 (1) 次の値を求めよ。

(i) $|4|$　(ii) $|-3|$　(iii) $|\sqrt{2}-2|$

(2) 数直線上において，次の 2 点間の距離を求めよ。

(i) A(3)，B(5)　(ii) A(-2)，B(4)　(iii) A(-1)，B(-6)

[解答]

(1)(i) $|4|=4$　(ii) $|-3|=3$　(iii) $|\sqrt{2}-2|=-\sqrt{2}+2$

(2)(i) $\mathrm{AB}=|5-3|=2$

(ii) $\mathrm{AB}=|4-(-2)|=|6|=6$

(iii) $\mathrm{AB}=|(-6)-(-1)|=|-5|=5$

PART3 根号を含む式の計算

3 (1) 次の式を計算せよ。

(i) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}$　(ii) $\sqrt{12}-\sqrt{27}$

(iii) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$　(iv) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)$

(2) 次の式の分母を有理化せよ。

(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$　(iii) $\dfrac{4}{3+\sqrt{7}}$

[解答]

(1)(i) $\sqrt{2}\times\sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{2\cdot3}=\sqrt{2^2\cdot3}=2\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{12}-\sqrt{27}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-\sqrt{3}$

(iii) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2=(\sqrt{5})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2=5-4\sqrt{10}+8=13-4\sqrt{10}$

(iv) $(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)=(\sqrt{7})^2-2^2=7-4=3$

(2)(i) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2-6}=-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(別解)

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6-2}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(iii) $\dfrac{4}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{4(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}=\dfrac{4(3-\sqrt{7})}{9-7}=\dfrac{4(3-\sqrt{7})}{2}=2(3-\sqrt{7})=6-2\sqrt{7}$

第 4 講　1 次不等式

PART1　1 次不等式とその解き方

1　次の 1 次不等式を解け。

(1)　$7x+8<4x-13$

(2)　$3(x-2)\leqq 2(5x+4)$

(3)　$0.5x+0.2>-0.1x+1.6$

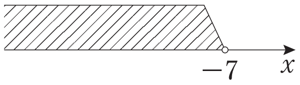
(4)　$\frac{1}{2}x+2\geqq\frac{4}{3}x-\frac{1}{6}$

[解答]

(1)　$7x+8<4x-13$

移項し整理して　$3x<-21$

両辺を 3 で割って　$x<-7$

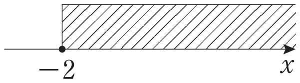


(2)　$3(x-2)\leqq 2(5x+4)$

かっこをはずして　$3x-6\leqq 10x+8$

移項し整理して　$-7x\leqq 14$

両辺を -7 で割って　$x\geqq -2$

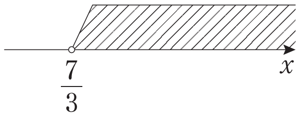


(3)　$0.5x+0.2>-0.1x+1.6$

両辺に 10 を掛けて　$5x+2>-x+16$

移項し整理して　$6x>14$

両辺を 6 で割って　$x>\frac{14}{6}$　　$x>\frac{7}{3}$

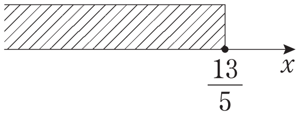


(4)　$\frac{1}{2}x+2\geqq\frac{4}{3}x-\frac{1}{6}$

両辺に 6 を掛けて　$3x+12\geqq 8x-1$

移項し整理して　$-5x\geqq -13$

両辺を -5 で割って　$x\leqq\frac{13}{5}$



PART2 いろいろな 1 次不等式

2 (1) 連立不等式 $\begin{cases} -x+4>2x-2 \\ 5x+3 \geqq 3x+1 \end{cases}$ を解け。

(2) 不等式 $-3x-2 \leqq 2x+1 < 5x-11$ を解け。

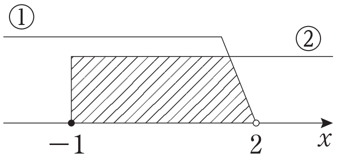
(3) 1 時間 400 円で借りることができる自習スペースがある。入会金 500 円を払って会員になると，1 時間あたり 1 割引で借りることができる。入会してこの自習スペースを借りる場合，何時間以上利用すれば入会しないで利用するより安くなるか。
ただし，このスペースの利用は 1 時間単位である。

[解答]

(1) $-x+4>2x-2$ より $-3x>-6$　　$x<2$ … ①

$5x+3 \geqq 3x+1$ より $2x \geqq -2$　　$x \geqq -1$ … ②

①と②の共通範囲を求めて $-1 \leqq x < 2$

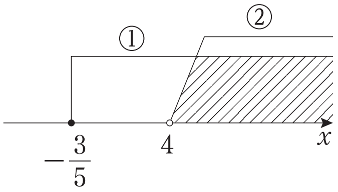


(2) $\begin{cases} -3x-2 \leqq 2x+1 & \cdots\cdots ① \\ 2x+1<5x-11 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①より $-5x \leqq 3$　　$x \geqq -\dfrac{3}{5}$

②より $-3x<-12$　　$x>4$

①と②の共通範囲を求めて　$x>4$



(3) x 時間借りるとする。

400 円の 1 割引の値段は $400 \times \dfrac{9}{10} = 360$（円）

条件より $400x>500+360x$

$40x>50+36x$

$4x>50$

$x>\dfrac{25}{2}=12.5$

利用は 1 時間単位であるから $x \geqq 13$

よって，入会して 13 時間以上利用すれば，入会しないで利用するより安くなる。

PART3 絶対値を含む方程式・不等式

3 (1) 次の方程式を解け。

(i) $|x|=3$　　(ii) $|x-1|=3$

(2) 次の不等式を解け。

(i) $|x|<3$　　(ii) $|x+2|<3$

(iii) $|x|\geqq 3$　　(iv) $|x-3|\geqq 3$

[解答]

(1)(i) $|x|=3$ より $x=\pm 3$

(ii) $|x-1|=3$ より $x-1=\pm 3$　$x=1\pm 3$　　よって　$x=4,\ -2$

(2)(i) $|x|<3$ より $-3<x<3$

(ii) $|x+2|<3$ より $-3<x+2<3$　　よって　$-5<x<1$

(iii) $|x|\geqq 3$ より $x\leqq -3,\ 3\leqq x$

(iv) $|x-3|\geqq 3$ より $x-3\leqq -3,\ 3\leqq x-3$　　よって　$x\leqq 0,\ 6\leqq x$

第 5 講　集合，命題と条件

PART1　集合と要素，部分集合

1　(1)　次の集合を，{　　} の中に要素を書き並べて表せ。

(i)　1 以上 30 以下の 3 の倍数全体の集合 A

(ii)　24 の正の約数全体の集合 B

(2)　$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ と次の集合との間に成り立つ関係を，記号 $\subset$，$=$ を用いて表せ。

(i)　$B=\{2,\ 3\}$　　(ii)　$C=\{x \mid x$ は10 以下の素数$\}$

(iii)　$D=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$　　(iv)　$E=\varnothing$

[解答]

(1)(i)　$A=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30\}$

(ii)　$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$

(2)(i)　$B\subset A$

(ii)　$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ より，$A=C$

(iii)　$D=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ より，$A\subset D$

(iv)　$E\subset A$

PART2　共通部分と和集合，全体集合と補集合

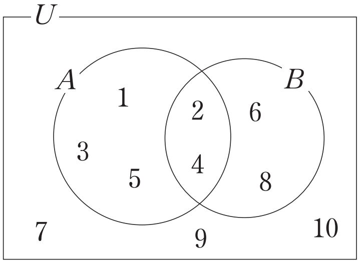
2　$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ を全体集合とする。2つの集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$ について，次の集合の要素を求めよ。

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}$

(4)　$\overline{A}\cap B$　　(5)　$\overline{A\cup B}$　　(6)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

[解答]

ベン図は右図。



(1)　$A\cap B=\{2,\ 4\}$

(2)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8\}$

(3)　$\overline{A}=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(4)　$\overline{A}\cap B=\{6,\ 8\}$

(5)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{7,\ 9,\ 10\}$

(6)　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

PART3 命題と条件

3 (1) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i) $x=0$ ならば $xy=0$　　(ii) $x^2=y^2$ ならば $x=y$

(iii) n は 18 の正の約数 $\Rightarrow$ n は 12 の正の約数

(2) 次の命題の真偽を調べよ。ただし，x は実数とする。

(i) $x<2 \Rightarrow x<5$

(ii) $2<x<5 \Rightarrow 3<x<7$

[解答]

(1)(i) $x=0$ のとき　$xy=0\cdot y=0$　　よって真

(ii) $x=1$，$y=-1$ のとき，$x^2=y^2$ であるが，$x=y$ を満たさない。

よって偽（反例　$x=1$，$y=-1$）

(iii) 18 の正の約数は 1，2，3，6，9，18

12 の正の約数は 1，2，3，4，6，12

$n=9$ のとき，n は 18 の正の約数であるが，12 の正の約数ではない。

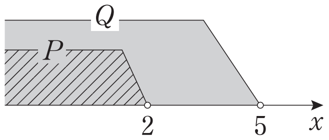
よって偽（反例 $n=9$）

(2)(i) 真

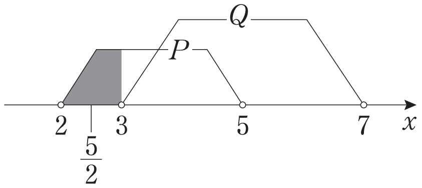
(ii) 偽　（反例 $x=\frac{5}{2}$）

（参考図）

(i)



(ii)



PART4 必要条件と十分条件，条件の否定

4 x，y は実数とする。次の問いに答えよ。

(1) 次の ☐ に「必要条件であるが十分条件ではない」「十分条件であるが必要条件ではない」「必要十分条件である」「必要条件でも十分条件でもない」のうち適切なものを入れよ。

(i) $x=3$ は $x^2=3x$ であるための ☐。

(ii) $x \leqq 2$ は $x<2$ であるための ☐。

(iii) $x=0$ は，$|x|=0$ であるための ☐。

(iv) $xy>0$ は，$x+y>0$ であるための ☐。

(2) 次の条件の否定を述べよ。ただし，x，y は実数とする。

(i) x は有理数である。　(ii) $x=0$ かつ $y=0$　(iii) $x<4$ または $y \geqq -2$

[解答]

(1)(i) $x^2=3x$ より $x^2-3x=0$　$x(x-3)=0$　$x=0$，3

$x=3 \Rightarrow x^2=3x$ は真

$x^2=3x \Rightarrow x=3$ は偽(反例：$x=0$)

よって，$x=3$ は $x^2=3x$ であるための十分条件であるが必要条件ではない。

(ii) $x \leqq 2 \Rightarrow x<2$ は偽(反例：$x=2$)

$x<2 \Rightarrow x \leqq 2$ は真

よって，$x \leqq 2$ は $x<2$ であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(iii) $x=0 \Rightarrow |x|=0$ は真

$|x|=0 \Rightarrow x=0$ は真

よって，$x=0$ は，$|x|=0$ であるための必要十分条件である。

(iv) $xy>0 \Rightarrow x+y>0$ は偽(反例：$x=-1$，$y=-2$)

$x+y>0 \Rightarrow xy>0$ は偽(反例：$x=-1$，$y=2$)

よって，$xy>0$ は，$x+y>0$ であるための必要条件でも十分条件でもない。

(2)(i) x は無理数である　(ii) $x \neq 0$ または $y \neq 0$　(iii) $x \geqq 4$ かつ $y<-2$

第 6 講　命題と論証
PART1　逆・裏・対偶

1　n は整数，x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

(1)　n が 2 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。

(2)　$x \neq 1$ ならば $x^2-4x+3 \neq 0$ である。

[解答]

(1)　命題は偽である。(反例：$n=6$)

逆：n が 4 の倍数ならば，n は 2 の倍数である。

裏：n が 2 の倍数でないならば，n は 4 の倍数でない。

対偶：n が 4 の倍数でないならば，n は 2 の倍数でない。

もとの命題が偽より，対偶も偽

逆は真

よって，裏も真

(2)　逆：$x^2-4x+3 \neq 0$ ならば $x \neq 1$ である。

裏：$x=1$ ならば $x^2-4x+3=0$ である。

対偶：$x^2-4x+3=0$ ならば $x=1$ である。

$x^2-4x+3=0$ より $(x-3)(x-1)=0$　$x=3$，1

よって，対偶は偽(反例：$x=3$)

対偶が偽より，もとの命題も偽(反例：$x=3$)

裏は真

裏が真より，逆も真

PART2 命題と証明

2 (1) n を整数とする。n^2 が 3 の倍数でないならば, n は 3 の倍数ではないことを証明せよ。

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$1-2\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

[解答]

(1) 与えられた命題の対偶は

「n が 3 の倍数ならば，n^2 は 3 の倍数である」

である。これを証明する。

n が 3 の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=3k$$

と表される。このとき

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$$

$3k^2$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数である。

よって，対偶が真より，もとの命題も真である。

(2) $1-2\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$1-2\sqrt{3}$ は有理数であるから，

有理数 r を用いて

$$1-2\sqrt{3}=r$$

とおくと

$$\sqrt{3}=\frac{1-r}{2}$$

r は有理数より，$\dfrac{1-r}{2}$ も有理数であり，$\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$1-2\sqrt{3}$ は無理数である。

第 7 講　2次関数とグラフ
PART1 関数とその表し方

1 底辺と高さの和が 12cm の三角形がある。この三角形の底辺の長さを $x$cm，面積を $y$cm^2 とすると，y は x の関数である。次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。また，定義域も示せ。

(2) (1)の関数を $y=f(x)$ とする。次の値を求めよ。

(i) $f(4)$　　(ii) $f(8)$　　(iii) $f(t)$

[解答]

(1) 三角形の高さは $(12-x)$cm より

$$y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(12-x)=6x-\frac{1}{2}x^2$$

底辺，および高さはともに正より $x>0$ かつ $12-x>0$

よって定義域は $0<x<12$

したがって　$y=-\frac{1}{2}x^2+6x\ (0<x<12)$

(2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6x$

(i) $f(4)=-\frac{1}{2}\cdot4^2+6\cdot4=16$

(ii) $f(8)=-\frac{1}{2}\cdot8^2+6\cdot8=16$

(iii) $f(t)=-\frac{1}{2}t^2+6t$

PART2 1次関数のグラフと最大値，最小値

2 (1) 次の点は，どの象限にあるか。

(i) $(-1,\ -2)$　(ii) $(3,\ 3)$　(iii) $(-5,\ 2)$　(iv) $(4,\ -1)$

(2) 次の1次関数のグラフをかき，値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

(i) $y=-3x+1\quad(-1\leqq x\leqq 1)$　(ii) $y=\dfrac{1}{2}x-3\quad(2\leqq x<6)$

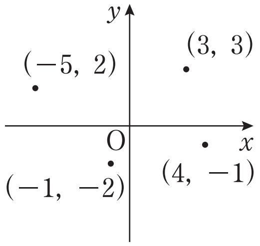
[解答]

(1)(i) 第3象限

(ii) 第1象限

(iii) 第2象限

(iv) 第4象限



(2)(i) $y=-3x+1$ において

$x=-1$ のとき $y=4$

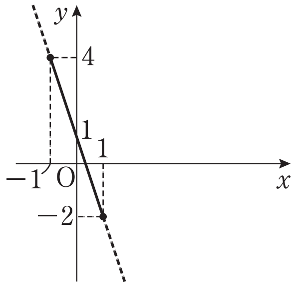
$x=1$ のとき $y=-2$

よって，グラフは右図実線部分。

値域は $-2\leqq y\leqq 4$

$x=-1$ のとき最大値 4

$x=1$ のとき最小値 -2



(ii) $y=\dfrac{1}{2}x-3$ において

$x=2$ のとき $y=-2$

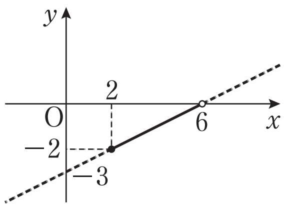
$x=6$ のとき $y=0$

よって，グラフは右図実線部分。

値域は $-2\leqq y<0$

最大値はない

$x=2$ のとき最小値 -2



PART3 $y=ax^2+q$ のグラフ，$y=a(x-p)^2$ のグラフ

3 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^2+2$　　(2) $y=2x^2-3$

(3) $y=(x-1)^2$　　(4) $y=-2(x+1)^2$

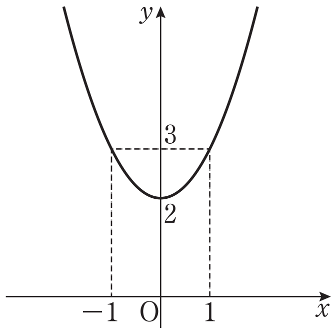
[解答]

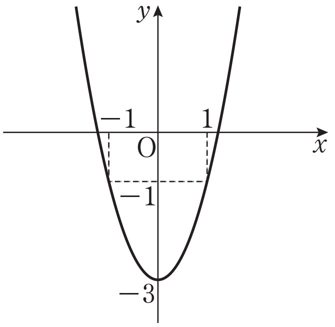
(1) 軸は y 軸(直線 $x=0$)，頂点は点 $(0,\ 2)$，グラフは下図

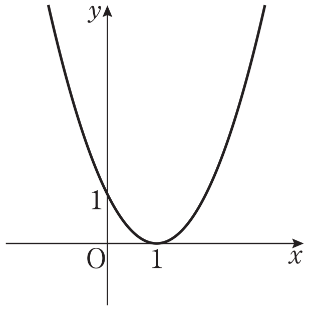
(2) 軸は y 軸(直線 $x=0$)，頂点は点 $(0,\ -3)$，グラフは下図

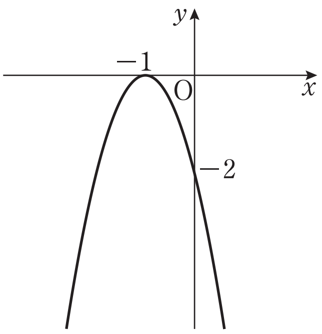
(3) 軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ 0)$，グラフは下図

(4) 軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ 0)$，グラフは下図

(1)


(2)


(3)


(4)


PART4　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

4　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=(x-1)^2+2$　　　(2)　$y=2(x+3)^2-1$

(3)　$y=-(x-2)^2-1$　　　(4)　$y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+5$

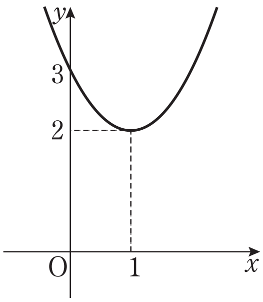
[解答]

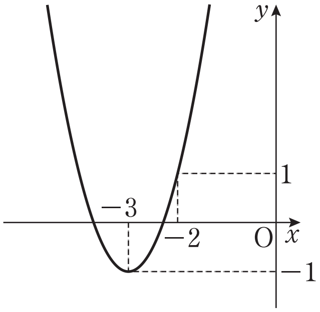
(1)　軸は直線 $x=1$，頂点は点 $(1,\ 2)$，グラフは下図

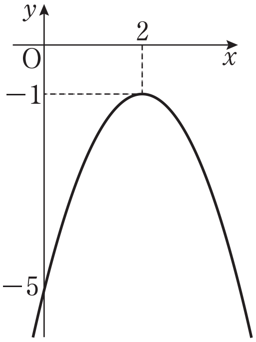
(2)　軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ -1)$，グラフは下図

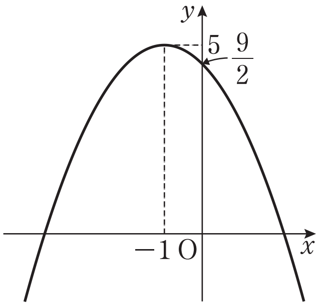
(3)　軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ -1)$，グラフは下図

(4)　軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ 5)$，グラフは下図

(1)


(2)


(3)


(4)


PART5 平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

5 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^2-6x-1$　　(2) $y=x^2+4x+5$

(3) $y=2x^2+4x-5$　　(4) $y=-x^2-8x$

(5) $y=-3x^2+3x+2$　　(6) $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$

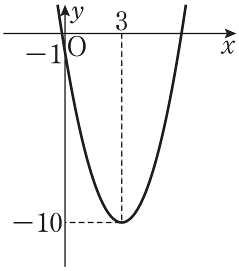
[解答]

(1) $y=x^2-6x-1$

$=(x-3)^2-3^2-1$

$=(x-3)^2-10$

軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3,\ -10)$

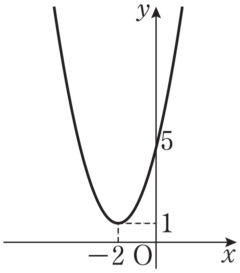


(2) $y=x^2+4x+5$

$=(x+2)^2-2^2+5$

$=(x+2)^2+1$

軸は直線 $x=-2$，頂点は点 $(-2,\ 1)$



(3) $y=2x^2+4x-5$

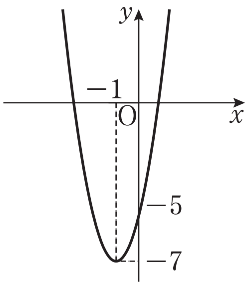
$=2(x^2+2x)-5$

$=2\{(x+1)^2-1^2\}-5$

$=2(x+1)^2+2\cdot(-1)-5$

$=2(x+1)^2-7$

軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ -7)$



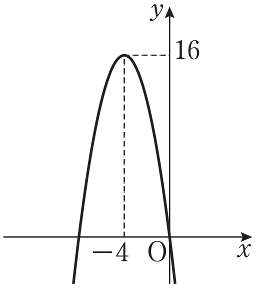
(4) $y=-x^2-8x$

$=-(x^2+8x)$

$=-\{(x+4)^2-4^2\}$

$=-(x+4)^2+16$

軸は直線 $x=-4$，頂点は点 $(-4,\ 16)$



(5) $y=-3x^2+3x+2$

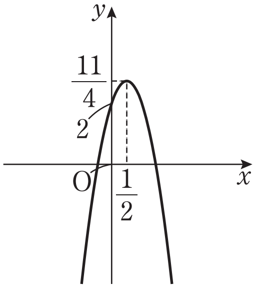
$=-3(x^2-x)+2$

$=-3\left\{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}+2$

$=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{4}+2$

$=-3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}$

軸は直線 $x=\dfrac{1}{2}$，頂点は点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{11}{4}\right)$



(6) $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$

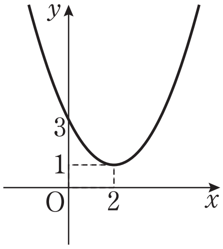
$=\dfrac{1}{2}(x^2-4x)+3$

$=\dfrac{1}{2}\{(x-2)^2-2^2\}+3$

$=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+\dfrac{1}{2}\cdot(-4)+3$

$=\dfrac{1}{2}(x-2)^2+1$

軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 1)$



PART6 放物線の平行移動

6 (1) 放物線 $y=2x^2-8x+5$ を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y=x^2-2x+3$ を平行移動して放物線 $y=x^2+6x+3$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

[解答]

(1) $y=2x^2-8x+5$

$=2(x^2-4x)+5$

$=2\{(x-2)^2-4\}+5$

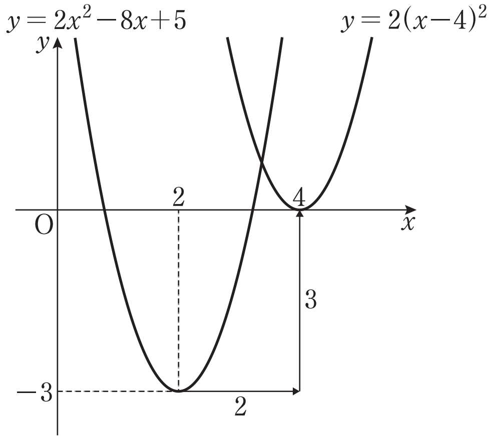
$=2(x-2)^2-3$

よって，この放物線の頂点は点 $(2,\ -3)$

この放物線を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，その頂点は点 $(4,\ 0)$ に移動する。

よって，求める放物線の方程式は

$y=2(x-4)^2$ $(=2x^2-16x+32)$



(2) $y=x^2-2x+3$ …… ① を変形すると

$y=x^2-2x+3$

$=(x-1)^2+2$

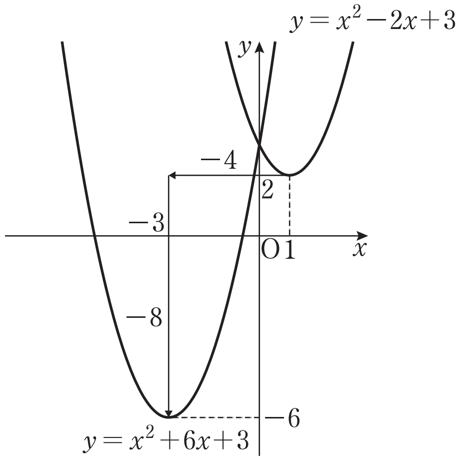
①の頂点は点 $(1,\ 2)$

$y=x^2+6x+3$ …… ②を変形すると

$y=x^2+6x+3$

$=(x+3)^2-6$

②の頂点は点 $(-3,\ -6)$



よって，点 $(1,\ 2)$ が，点 $(-3,\ -6)$ に重なるように平行移動すればよい。

したがって，①のグラフを，x 軸方向に -4，y 軸方向に -8 だけ平行移動すればよい。

第 8 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2 次関数の最大・最小

1　次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=(x-2)^2+3$　　(2)　$y=-(x+3)^2-1$

(3)　$y=3x^2-6x-1$　　(4)　$y=-2x^2-2x$

[解答]

(1)　$x=2$ のとき最小値 3，最大値はない

(2)　$x=-3$ のとき最大値 -1，最小値はない

(3)　$y=3x^2-6x-1=3(x^2-2x)-1=3\{(x-1)^2-1\}-1=3(x-1)^2-4$

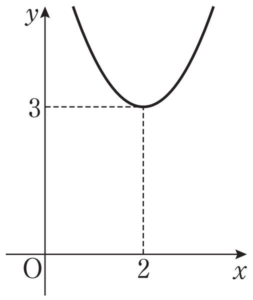
よって $x=1$ のとき最小値 -4，最大値はない

(4)　$y=-2x^2-2x=-2(x^2+x)=-2\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}=-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

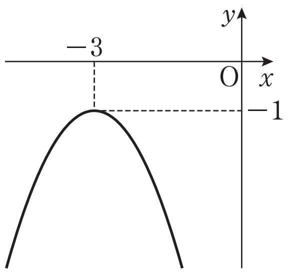
よって $x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$，最小値はない

(参考図)

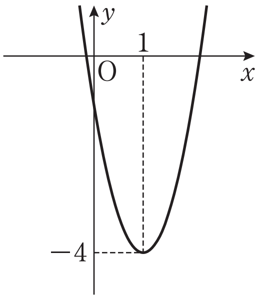
(1)



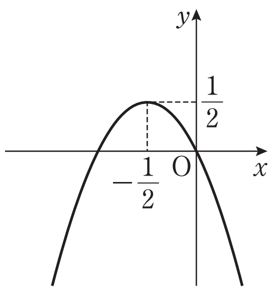
(2)



(3)



(4)



PART2 定義域が限られた 2 次関数の最大・最小

2 (1) 次の 2 次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(i) $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 3)$　　(ii) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ $(-2<x\leqq 1)$

(iii) $y=x^2-4x-2$ $(0\leqq x\leqq 4)$　　(iv) $y=-x^2+6x+2$ $(4\leqq x\leqq 5)$

(2) ある商品を 150 円で売ると 1 日平均で 1000 個売れ，180 円で売ると 1 日平均で 880 個売れる見込みである。

(i) この商品を 150 円, 180 円のどちらの価格で売った方が 1 日平均の売上高が大きいか。

(ii) この商品の売価と 1 日平均の売れる個数が比例関係にあると仮定すると，この商品を 1 円値上げすると，売り上げ個数は 1 日平均で 4 個減少すると予想される。この予想をもとに，この商品の売価をいくらにすると，1 日平均の売上高が最大になるかを求めよ。

[解答]

(1)(i) $y=x^2$

$x=-1$ のとき $y=1$

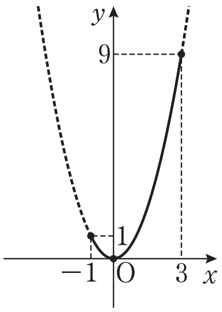
$x=3$ のとき $y=9$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=3$ で最大値 9，$x=0$ で最小値 0

をとる。



(ii) $y=-\frac{1}{2}x^2+2$

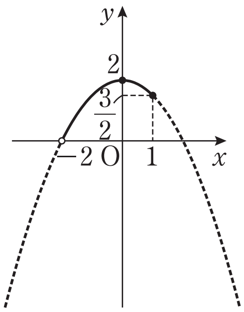
$x=-2$ のとき $y=0$

$x=1$ のとき $y=\frac{3}{2}$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=0$ で最大値 2 をとり，最小値はない



(iii)　$y=x^2-4x-2=(x-2)^2-6$

$x=0$ のとき $y=-2$

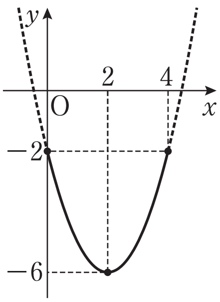
$x=4$ のとき $y=-2$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=0$，4 で最大値 -2，$x=2$ で最小値 -6

をとる。



(iv)　$y=-x^2+6x+2=-(x-3)^2+11$

$x=4$ のとき $y=10$

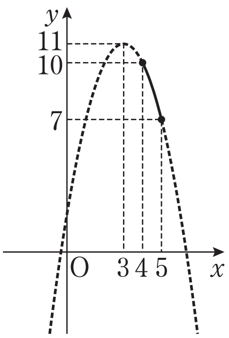
$x=5$ のとき $y=7$

よって，この関数のグラフは右図実線部分。

したがって，この関数は

$x=4$ で最大値 10，$x=5$ で最小値 7

をとる。



(2)(i)　売価が 150 円のとき，売上高は $150\times1000=150000$（円）

売価が 180 円のとき，売上高は $180\times880=158400$（円）

よって，180 円で売った方が 1 日平均の売上高が大きい。

(ii)　150 円から売価を x 円値上げすると，1 日平均の売り上げ個数は 1000 個から $4x$ 個減少する。

$x\geqq0$ かつ $1000-4x\geqq0$ より $0\leqq x\leqq250$

1 日平均の売上高を y 円とすると

$y=(150+x)(1000-4x)$

$=-4x^2+400x+150000$

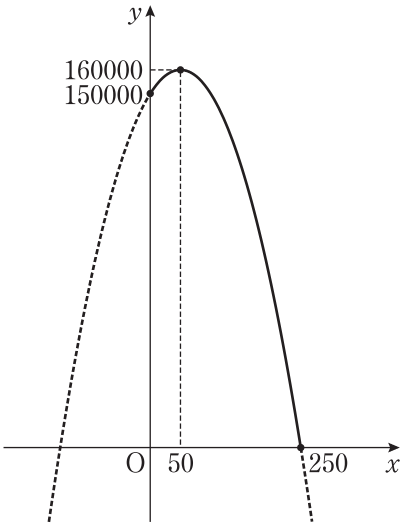
$=-4(x-50)^2+160000$

よって，y は $x=50$ のとき最大値 160000 をとる。

したがって，この商品の売価を

$150+50=200$（円）

にすると，1 日平均の売上高が最大になる。



PART3　2 次関数の決定

3　次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(2,\ 5)$ で，点 $(1,\ 6)$ を通る。

(2)　軸の方程式が $x=-1$ で，2 点 $(1,\ -9)$，$(0,\ -3)$ を通る。

(3)　3 点 $(1,\ 6)$，$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 9)$ を通る。

[解答]

(1)　頂点が点 $(2,\ 5)$ であることより，求める 2 次関数は

$$y=a(x-2)^2+5$$

と表すことができる。

グラフが点 $(1,\ 6)$ を通るから

$$6=a(1-2)^2+5 \qquad a=1$$

よって，求める 2 次関数は　$y=(x-2)^2+5$

(2)　軸が直線 $x=-1$ であることより，求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表すことができる。

グラフが 2 点 $(1,\ -9)$，$(0,\ -3)$ を通るから

$$\begin{cases} -9=4a+q \\ -3=a+q \end{cases}$$

これを解いて，$a=-2$，$q=-1$

よって，求める 2 次関数は　$y=-2(x+1)^2-1$

(3)　求める 2 次関数を

$$y=ax^2+bx+c$$

とおく。この関数のグラフが 3 点 $(1,\ 6)$，$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 9)$ を通るから

$$\begin{cases} 6=a+b+c & \cdots\cdots① \\ 2=a-b+c & \cdots\cdots② \\ 9=4a-2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①－②より $2b=4$　　$b=2$　……④

④を①に代入して整理すると $a+c=4$　……⑤

④を③に代入して整理すると $4a+c=13$　……⑥

⑤，⑥より $a=3$，$c=1$

よって，求める 2 次関数は $y=3x^2+2x+1$

（別解）

③－①より $3a-3b=3$　　$a-b=1$　……⑦

③－②より $3a-b=7$　……⑧

⑦，⑧より $a=3$，$b=2$

これらを①に代入して $3+2+c=6$　　$c=1$

よって，求める 2 次関数は $y=3x^2+2x+1$

第 9 講　2 次方程式

PART1　2 次方程式の解法

1　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2-5x-36=0$　(2)　$x^2+12x+36=0$　(3)　$3x^2-7x-6=0$

(4)　$x^2-12=0$　(5)　$2x^2-5x+1=0$　(6)　$x^2+2x-1=0$

[解答]

(1)　$x^2-5x-36=0$　$(x-9)(x+4)=0$　$x=9,\ -4$

(2)　$x^2+12x+36=0$　$(x+6)^2=0$　$x=-6$

(3)　$3x^2-7x-6=0$　$(3x+2)(x-3)=0$　$x=-\dfrac{2}{3},\ 3$

(4)　$x^2-12=0$　$x^2=12$　$x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$

(5)　$2x^2-5x+1=0$　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{4}$

(6)　$x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot(-1)}}{1}=-1\pm\sqrt{2}$$

(別解)

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

PART2　2 次方程式の実数解の個数

2　(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を求めよ。

(i)　$x^2+4x+1=0$　　(ii)　$x^2-3x+3=0$　　(iii)　$9x^2+6x+1=0$

(2)　2 次方程式 $3x^2+4x+m=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

[解答]

(1)　与えられた方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=4^2-4\cdot1\cdot1=12>0$ より 2 個

(別解)　$\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot1=3>0$ より 2 個

(ii)　$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$ より 0 個

(iii)　$D=6^2-4\cdot9\cdot1=0$ より 1 個

(別解)　$\dfrac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$ より 1 個

(2)　この方程式の判別式を D とすると

$$D=4^2-4\cdot3\cdot m=16-12m$$

実数解をもつための条件は $D\geqq0$

よって $16-12m\geqq0$　より　$m\leqq\dfrac{4}{3}$

(別解)　$\dfrac{D}{4}=2^2-3\cdot m\geqq0$　より　$m\leqq\dfrac{4}{3}$

PART3　2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標

3　次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=x^2+2x-8$　　(2)　$y=-x^2+6x+4$　　(3)　$y=2x^2+4x+2$

[解答]

(1)　2次方程式 $x^2+2x-8=0$ を解くと

$(x+4)(x-2)=0$ より $x=-4,\ 2$

よって，共有点の座標は $(-4,\ 0)$，$(2,\ 0)$

(2)　2次方程式 $-x^2+6x+4=0$ を解くと

$x^2-6x-4=0$ より $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\cdot(-4)}}{1}=3\pm\sqrt{13}$

よって，共有点の座標は $(3-\sqrt{13},\ 0)$，$(3+\sqrt{13},\ 0)$

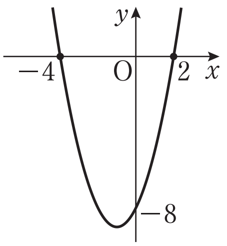
(3)　2次方程式 $2x^2+4x+2=0$ を解くと

$x^2+2x+1=0$ より $(x+1)^2=0$　　$x=-1$

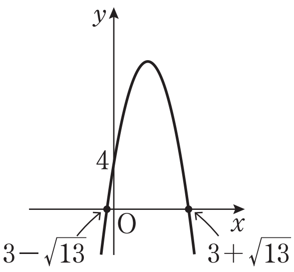
よって，共有点の座標は $(-1,\ 0)$

(参考図)

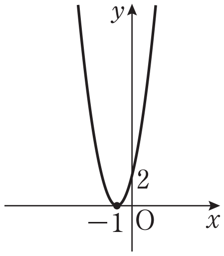
(1)



(2)



(3)



PART4　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

4　(1)　次の2次関数のグラフと x 軸の位置関係を調べよ。

(i)　$y=2x^2-5x+2$　　(ii)　$y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$　　(iii)　$y=x^2+6x+10$

(2)　2次関数 $y=x^2+2x+m$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

[解答]

(1)(i)　2次方程式 $2x^2-5x+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9>0$$

よって，x 軸と異なる2点で交わる

(ii)　2次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=0$ の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

よって，x 軸と接する

(iii)　2次方程式 $x^2+6x+10=0$ の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot1\cdot10=-4<0$$

よって，x 軸と共有点をもたない

(2)　2次方程式 $x^2+2x+m=0$ の判別式を D とすると

$$D=2^2-4\cdot1\cdot m=4-4m$$

2次関数のグラフが x 軸と異なる2点で交わるための条件は $D>0$ である。

よって，$4-4m>0$ より $m<1$

第10講　2次不等式

PART1　2次不等式と2次関数のグラフ

1　次の2次不等式を解け

(1)　$(x+2)(x-1)>0$

(2)　$x(x-3)<0$

(3)　$x^2-2x-8\geqq 0$

(4)　$2x^2-5x-3\leqq 0$

(5)　$x^2+5x-2>0$

(6)　$-x^2+4x-1>0$

[解答]

(1)　$(x+2)(x-1)=0$ を解くと　$x=-2,\ 1$

よって，不等式の解は　$x<-2,\ 1<x$

(2)　$x(x-3)=0$ を解くと　$x=0,\ 3$

よって，不等式の解は　$0<x<3$

(3)　$x^2-2x-8=0$ を解くと　$(x-4)(x+2)=0$　　$x=4,\ -2$

よって，不等式の解は　$x\leqq -2,\ 4\leqq x$

(別解) $x^2-2x-8\geqq 0$ より $(x-4)(x+2)\geqq 0$　　よって $x\leqq -2,\ 4\leqq x$

(4)　$2x^2-5x-3=0$ を解くと $(2x+1)(x-3)=0$　　$x=-\dfrac{1}{2},\ 3$

よって，不等式の解は　$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$

(別解) $2x^2-5x-3\leqq 0$ より $(2x+1)(x-3)\leqq 0$　　よって $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 3$

(5)　$x^2+5x-2=0$ を解くと $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

よって，不等式の解は $x<\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2},\ \dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}<x$

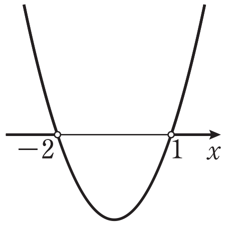
(6)　$-x^2+4x-1>0$ の両辺に -1 をかけて　$x^2-4x+1<0$

$x^2-4x+1=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{3}$

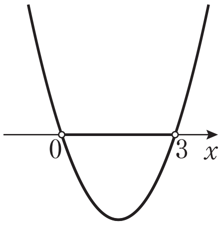
よって，不等式の解は $2-\sqrt{3}<x<2+\sqrt{3}$

（参考図）

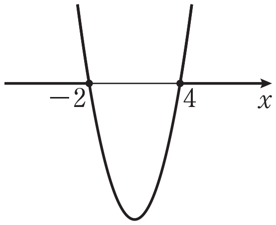
(1)



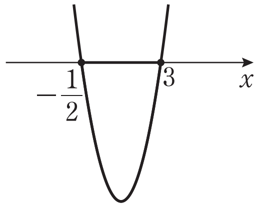
(2)



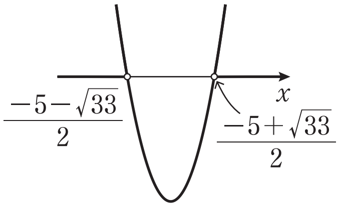
(3)



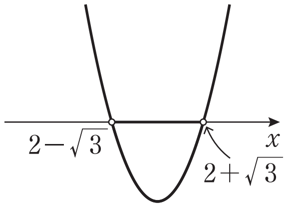
(4)



(5)



(6)



PART2　2次不等式(グラフが接するとき)

2　次の2次不等式を解け。

(1)　$x^2-4x+4>0$　　(2)　$9x^2+6x+1\geqq 0$

(3)　$x^2+10x+25<0$　　(4)　$4x^2-12x+9\leqq 0$

[解答]

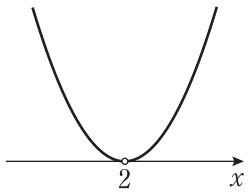
(1)　$x^2-4x+4>0$ より $(x-2)^2>0$　よって2以外のすべての実数

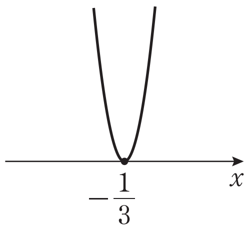
(2)　$9x^2+6x+1\geqq 0$ より $(3x+1)^2\geqq 0$　よってすべての実数

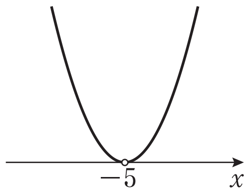
(3)　$x^2+10x+25<0$ より $(x+5)^2<0$　よって解はない

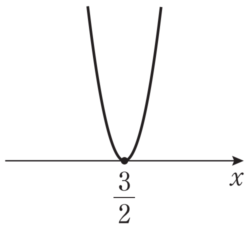
(4)　$4x^2-12x+9\leqq 0$ より $(2x-3)^2\leqq 0$　よって $x=\dfrac{3}{2}$

(参考図)

(1)


(2)


(3)


(4)


PART3　2次不等式（グラフが共有点をもたないとき）

3　次の2次不等式を解け。

(1)　$x^2+5x+7>0$

(2)　$x^2-2x+3 \geqq 0$

(3)　$3x^2+4x+3<0$

(4)　$-2x^2+x-3 \geqq 0$

[解答]

(1)　2次方程式 $x^2+5x+7=0$ の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　すべての実数

（別解）$x^2+5x+7=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

よって，不等式の解は　すべての実数

(2)　2次方程式 $x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot3=-2<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　すべての実数

（別解）$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$

よって，不等式の解は　すべての実数

(3)　2次方程式 $3x^2+4x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-3\cdot3=-5<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　ない

（別解）$3x^2+4x+3=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}>0$

よって，不等式の解は　ない

(4)　$-2x^2+x-3 \geqq 0$ の両辺に -1 をかけて　$2x^2-x+3 \leqq 0$

2 次方程式 $2x^2-x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot3=-23<0$$

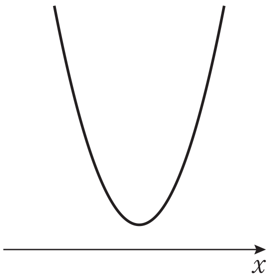
x^2 の係数は正であるから，不等式の解は　ない

（別解）$-2x^2+x-3=-2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}<0$

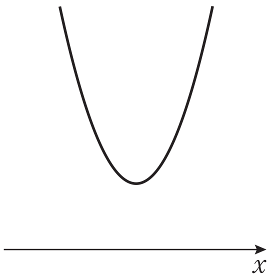
よって，不等式の解は　ない

（参考図）

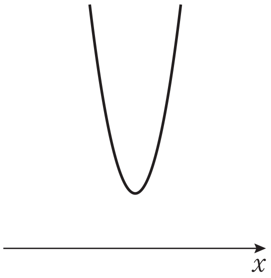
(1)



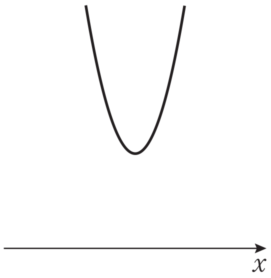
(2)



(3)



(4)



PART4　２次不等式の利用

4

(1)　2 次関数 $y=x^2+2mx+5$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　2 次不等式 $-2x^2+kx-k<0$ の解がすべての実数のとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　連立不等式 $\begin{cases} x^2-3x+2 \geqq 0 \\ 2x^2-5x-3<0 \end{cases}$ を解け。

[解答]

(1)　2 次方程式 $x^2+2mx+5=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot5=m^2-5$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D \geqq 0$ のときであるから

$$m^2-5 \geqq 0$$

よって　$m \leqq -\sqrt{5}$，$\sqrt{5} \leqq m$

(2)　2 次関数 $y=-2x^2+kx-k$ のグラフは上に凸の放物線である。よって，不等式の解がすべての実数となるのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。

したがって，2 次方程式 $-2x^2+kx-k=0$ の判別式を D とすると

$$D=k^2-4\cdot(-2)\cdot(-k)=k^2-8k=k(k-8)<0$$

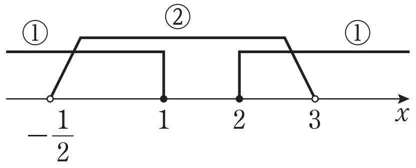
よって　$0<k<8$

(3)　$x^2-3x+2 \geqq 0$ より $(x-1)(x-2) \geqq 0$　　よって　$x \leqq 1$，$2 \leqq x$　……①

$2x^2-5x-3<0$ より $(2x+1)(x-3)<0$　　よって　$-\frac{1}{2}<x<3$　……②

①と②の共通範囲を求めて

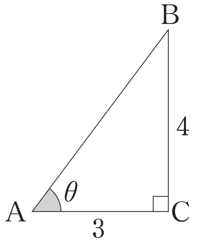
$$-\frac{1}{2}<x \leqq 1,\ 2 \leqq x<3$$

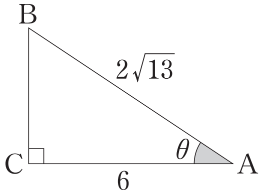


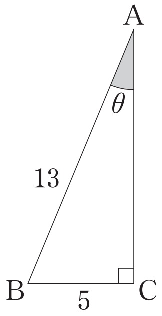
第11講　鋭角の三角比

PART1 直角三角形と三角比

1　次の図で，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)


(2)


(3)


[解答]

(1)　三平方の定理により $AB=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

よって　$\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\tan\theta=\frac{4}{3}$

(2)　三平方の定理により $BC=\sqrt{(2\sqrt{13})^2-6^2}=\sqrt{16}=4$

よって　$\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\theta=\frac{6}{2\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$，$\tan\theta=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(3)　三平方の定理により $AC=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

よって　$\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=\frac{12}{13}$，$\tan\theta=\frac{5}{12}$

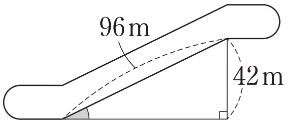
PART2 有名角の三角比，三角比の表

2 (1) 次の三角比の値を求めよ。

(i) $\sin 30^\circ$，$\cos 30^\circ$，$\tan 30^\circ$　　(ii) $\sin 45^\circ$，$\cos 45^\circ$，$\tan 45^\circ$

(iii) $\sin 60^\circ$，$\cos 60^\circ$，$\tan 60^\circ$

(2) ある商業施設にあるエスカレーターは，全長 96 m，高低差 42 m である。このエスカレーターの傾斜の角の大きさを，以下の三角比の表を用いて求めよ。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

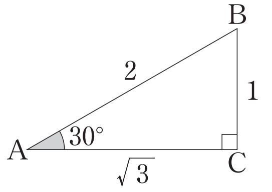
(1)(i) $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 45^\circ = 1$

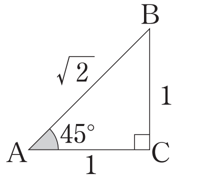
(iii) $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

（参考図）

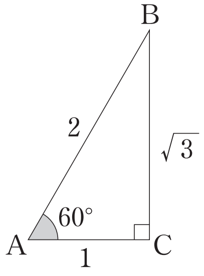
(i)



(ii)



(iii)



(2)　このエスカレーターの傾斜の角の大きさを θ とすると

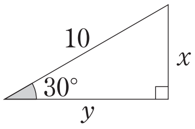
$$\sin\theta = \frac{42}{96} = 0.4375$$

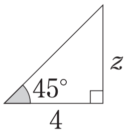
三角比の表より，$\sin\theta$ の値が 0.4375 に最も近い θ を求めると　$\theta \fallingdotseq 26^\circ$

よって，傾斜の角の大きさは　26°

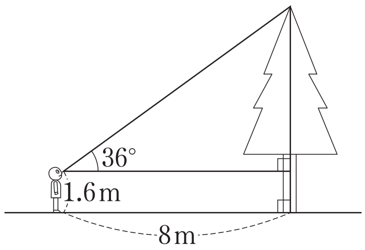
PART3 三角比の利用

3 (1) 下の図の直角三角形において，x，y，z の値を求めよ。





(2) 木の根元から 8 m 離れたところで，木の先端を見上げたとき，水平面となす角が 36° であった。目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。ただし，$\sin 36° = 0.5878$，$\cos 36° = 0.8090$，$\tan 36° = 0.7265$ とし，小数第 2 位を四捨五入せよ。



[解答]

(1) $x = 10\sin 30° = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$

$y = 10\cos 30° = 10 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$z = 4\tan 45° = 4 \cdot 1 = 4$

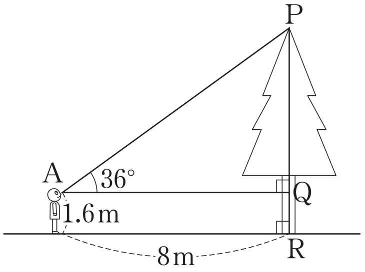
(2) 右図において

$\mathrm{PQ} = \mathrm{AQ}\tan 36° = 8 \times 0.7265 = 5.812$

よって，木の高さ PR は

$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QR}$

$= 5.812 + 1.6 = 7.412 \fallingdotseq 7.4\ (\mathrm{m})$



PART4 三角比の相互関係

4 (1) θ が鋭角で，$\cos\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) θ が鋭角で，$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

[解答]

(1) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$$

θ は鋭角より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{15}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\div\dfrac{1}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times 4=\sqrt{15}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{9}$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{2}{3}$$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

PART5　$90°-\theta$ の三角比

5　次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

(1)　$\sin 68°$　　(2)　$\cos 75°$　　(3)　$\tan 49°$

［解答］

(1)　$\sin 68° = \sin(90°-22°) = \cos 22°$

(2)　$\cos 75° = \cos(90°-15°) = \sin 15°$

(3)　$\tan 49° = \tan(90°-41°) = \dfrac{1}{\tan 41°}$

第12講　三角比の拡張

PART1　座標を用いた三角比の定義

1　次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 120°$，$\cos 120°$，$\tan 120°$

(2)　$\sin 135°$，$\cos 135°$，$\tan 135°$

(3)　$\sin 150°$，$\cos 150°$，$\tan 150°$

[解答]

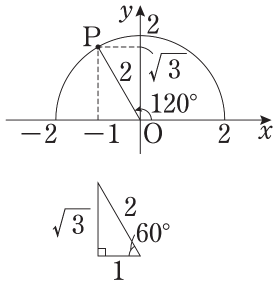
(1)　$\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120° = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$，$\tan 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

(2)　$\sin 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 135° = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 135° = \dfrac{1}{-1} = -1$

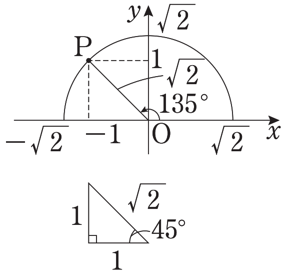
(3)　$\sin 150° = \dfrac{1}{2}$，$\cos 150° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 150° = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(参考図)

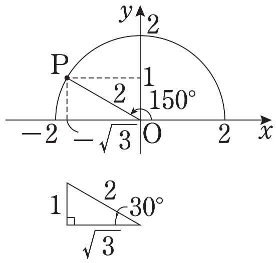
(1)



(2)



(3)



PART2 単位円を用いた三角比の定義

2 次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

(1) $\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$

(2) $\sin 45^\circ$，$\cos 45^\circ$

(3) $\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$

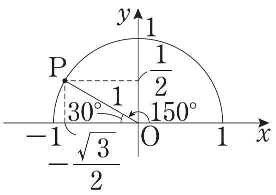
[解答]

(1) ＜図１＞より　$\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

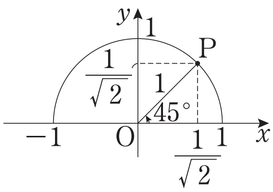
(2) ＜図２＞より　$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(3) ＜図３＞より　$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$

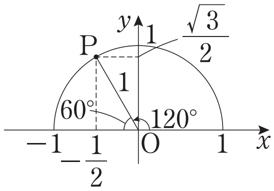
＜図１＞



＜図２＞



＜図３＞



PART3 三角比の値と角

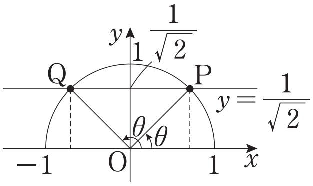
3 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(1) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　(3) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[解答]

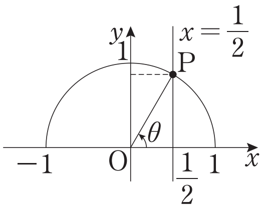
(1) 単位円の $y \geqq 0$ の部分において，y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるのは，右図の点 P，Q である。

よって，求める θ は　$\theta = 45^\circ$，135°



(2) 単位円の $y \geqq 0$ の部分において，x 座標が $\dfrac{1}{2}$ となるのは，右図の点 P である。

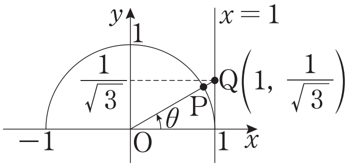
よって，求める θ は　$\theta = 60^\circ$



(3) 直線 $x = 1$ 上に，点 $\mathrm{Q}\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。

単位円の $y \geqq 0$ の部分と直線 OQ の交点は，右図の点 P である。

よって，求める θ は　$\theta = 30^\circ$



PART4　$180°-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

4　(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 153°$　　(ii)　$\cos 102°$　　(iii)　$\tan 170°$

(2)(i)　$90°<\theta<180°$ とする。$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。$\tan\theta=-2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$\sin 153°=\sin(180°-27°)=\sin 27°$

(ii)　$\cos 102°=\cos(180°-78°)=-\cos 78°$

(iii)　$\tan 170°=\tan(180°-10°)=-\tan 10°$

(2)(i)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$

$90°<\theta<180°$ より，$\cos\theta<0$ であるから $\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{5}\div\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{5}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}$

(ii)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$

$0°\leqq\theta\leqq 180°$ より，$\sin\theta\geqq 0$ であるから $\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\div\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times(-3)=-2\sqrt{2}$

(iii)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2)^2=5$

$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\tan\theta=-2<0$ より，θ は鈍角であるから $\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=(-2)\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

第 13 講　正弦定理・余弦定理

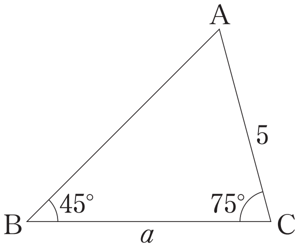
PART1　正弦定理

1　(1)　△ABC において，$b=5$，$B=45^\circ$, $C=75^\circ$ のとき，a を求めよ。また，△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

(2)　$c=2\sqrt{3}$ である △ABC において，外接円の半径が $R=2$ のとき，C を求めよ。

[解答]

(1)　$A+B+C=180^\circ$ より



$A=180^\circ-B-C=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$

正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

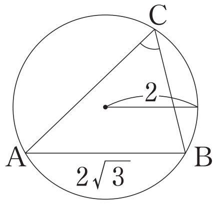
つまり $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}$

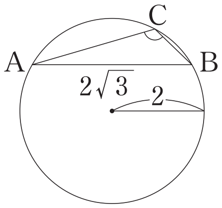
よって $a=\dfrac{5}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=5\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$

また，正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=2R$ つまり $\dfrac{5}{\sin 45^\circ}=2R$

よって $R=\dfrac{5}{2\sin 45^\circ}=\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

(2)　正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=2R$





つまり $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}=4$

よって　$\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$ より $C=60^\circ$，120°

PART2 余弦定理

2 △ABC において，次の問いに答えよ。

(1) $b=2\sqrt{2}$，$c=3$，$A=45^\circ$ のとき，a を求めよ。

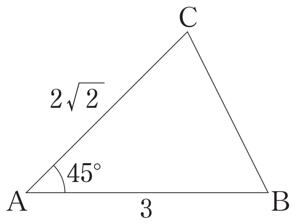
(2) $c=3$，$a=2$，$B=120^\circ$ のとき，b を求めよ。

[解答]

(1) 余弦定理より

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=(2\sqrt{2})^2+3^2-2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos45^\circ$$
$$=8+9-2\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5$$

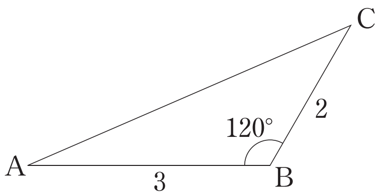
$a>0$ より　$a=\sqrt{5}$



(2) 余弦定理より

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos120^\circ$$
$$=9+4-2\cdot3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=19$$

$b>0$ より $b=\sqrt{19}$



PART3 余弦定理の利用

3 △ABC において，次の問いに答えよ。

(1) $a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}$，$c=4$ のとき，A を求めよ。

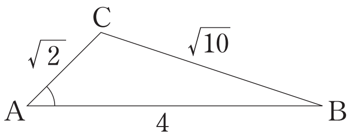
(2) $a=2\sqrt{3}$，$c=2\sqrt{7}$，$C=30^\circ$ のとき，b を求めよ。

[解答]

(1) 余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2+4^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot4}=\frac{8}{8\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



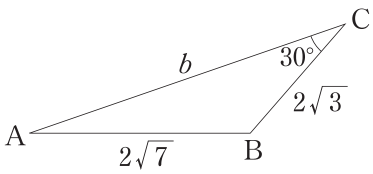
よって $A=45^\circ$

(2) 余弦定理より

$$(2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{3})^2+b^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot b\cos30^\circ$$

$$28=12+b^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b^2-6b-16=0 \qquad (b+2)(b-8)=0$$



$b>0$ より $b=8$

PART4 三角形の決定

4 (1) △ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，A は鋭角，直角，鈍角のいずれであるか。

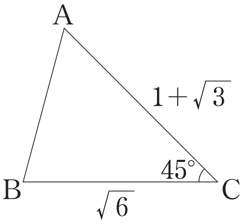
(2) △ABC において，$a=\sqrt{6}$，$b=1+\sqrt{3}$，$C=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

[解答]

(1) $6^2+5^2=61$，$7^2=49$ より $6^2+5^2>7^2$　つまり $b^2+c^2>a^2$

よって，余弦定理より，A は鋭角である。

(2) 余弦定理より



$$c^2=(\sqrt{6})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$

$$=6+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})=4$$

$c>0$ より $c=2$

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{2}$$

よって　$A=60^\circ$

したがって　$B=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

第14講　図形の計量

PART1　三角形の面積

1　次の △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$b=4$，$c=7$，$A=60^\circ$

(2)　$a=5$，$b=3$，$C=135^\circ$

(3)　$c=8$，$a=6$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

(4)　$a=\sqrt{13}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}$

[解答]

(1)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\sin 135^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}$

(3)　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=6\sqrt{7}$

(4)　余弦定理より

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=\frac{4+3-13}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=\frac{-6}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A=150^\circ$

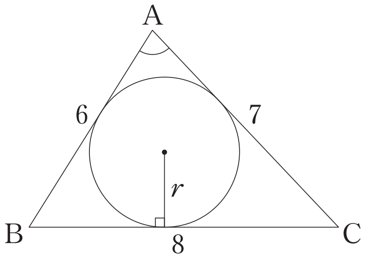
よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin 150^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

PART2 三角形の内接円と面積

2　$a=8$，$b=7$，$c=6$ である △ABC の内接円の半径 r を求めよ。

[解答]

余弦定理より



$$\cos A=\frac{7^2+6^2-8^2}{2\cdot7\cdot6}=\frac{21}{2\cdot7\cdot6}=\frac{1}{4}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

△ABC の面積を S とすると

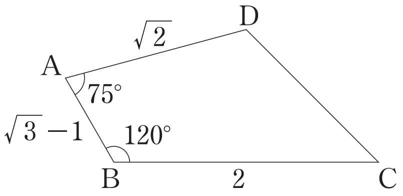
$$S=\frac{1}{2}\cdot7\cdot6\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{21\sqrt{15}}{4}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より

$$\frac{21\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}r(8+7+6)\qquad\frac{21}{2}r=\frac{21\sqrt{15}}{4}\qquad\text{よって}\qquad r=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

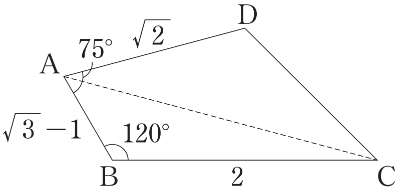
PART3 四角形の面積

3 $AB=\sqrt{3}-1$，$BC=2$，$DA=\sqrt{2}$，$\angle A=75^\circ$，$\angle B=120^\circ$ である四角形 ABCD の面積 S を求めよ。



[解答]

△ABC で余弦定理より



$$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\cos 120^\circ$$
$$=4-2\sqrt{3}+4-4(\sqrt{3}-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=6$$

$AC>0$ より $AC=\sqrt{6}$

正弦定理より $\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{2}{\sin\angle BAC}$

$$\sin\angle BAC=2\cdot\frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\angle BAC<60^\circ$ より $\angle BAC=45^\circ$

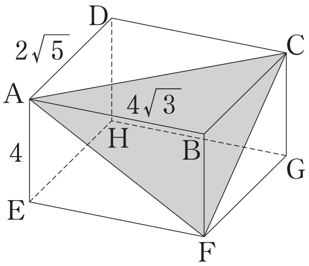
よって $\angle DAC=75^\circ-45^\circ=30^\circ$

したがって $S=\triangle ABC+\triangle DAC$

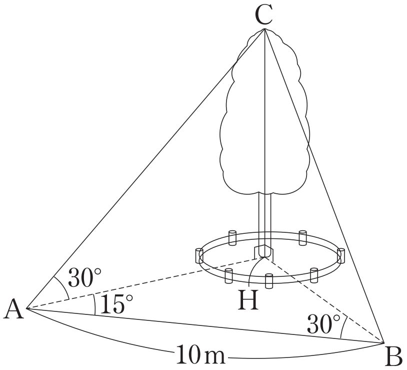
$$=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

PART4 空間図形への応用

4 (1) 右の図のように，$AB=4\sqrt{3}$，$AD=2\sqrt{5}$，$AE=4$ である直方体 ABCD−EFGH がある。△AFC の面積を求めよ。



(2) 右の図において，木の周りが柵で囲まれている。木より離れた２地点 A，B と木の先端 C について，$AB=10$ (m)，$\angle CAH=30°$，$\angle HAB=15°$，$\angle HBA=30°$ であった。このとき木の高さ CH を求めよ。



[解答]

(1) △ABC，△ABF，△BCF のそれぞれにおいて三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{17}$$

$$AF=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$$

$$CF=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+4^2}=6$$

△AFC で余弦定理より

$$\cos\angle AFC=\frac{8^2+6^2-(2\sqrt{17})^2}{2\cdot 8\cdot 6}=\frac{32}{2\cdot 8\cdot 6}=\frac{1}{3}$$

$$\sin\angle AFC=\sqrt{1-\cos^2\angle AFC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって $\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot CF\cdot\sin\angle AFC=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=16\sqrt{2}$

(2)　△HAB において

$\angle AHB = 180° - (15° + 30°) = 135°$

正弦定理より $\dfrac{AH}{\sin 30°} = \dfrac{10}{\sin 135°}$

$AH = 10 \div \sin 135° \times \sin 30° = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 5\sqrt{2}$

よって直角三角形 CAH において

$CH = AH \tan 30° = 5\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ (m)

第 15 講　データの分析

PART1　データの整理と代表値

1　(1)　次のデータの平均値，中央値をそれぞれ求めよ。

(i)　32，40，31，45，80

(ii)　45，41，39，50，44，45

(2)　右の表は，あるクラスの生徒 27 人のソフトボール投げの結果である。

(i)　中央値が含まれる階級を求めよ。

(ii)　最頻値を求めよ。

階級 (m)	度数 (人)
12 以上 14 未満	2
14 ～ 16	4
16 ～ 18	9
18 ～ 20	5
20 ～ 22	7
計	27

[解答]

(1)(i)　平均値は $\dfrac{32+40+31+45+80}{5}=\dfrac{228}{5}=45.6$

データを小さい順に並べると 31，32，40，45，80

よって，中央値は 40

(ii)　平均値は $\dfrac{45+41+39+50+44+45}{6}=\dfrac{264}{6}=44$

データを小さい順に並べると 39，41，44，45，45，50

よって，中央値は $\dfrac{44+45}{2}=44.5$

(2)(i)　度数の合計が 27 人より，中央値は値の小さい方から(大きい方から)14 番目の値である。これが含まれる階級は 16m 以上 18m 未満

(ii)　度数が最も大きい階級は 16m 以上 18m 未満。よって，最頻値は $\dfrac{16+18}{2}=17$ (m)

PART2 データの散らばり

2 次のデータは，書店 A，B におけるある本の 1 日の販売数 10 日分を，小さい順に並べたものである。

書店 A … 0，0，3，3，4，5，7，8，8，9

書店 B … 2，3，5，5，6，7，7，8，8，9

(1) それぞれのデータの四分位数を求めよ。

(2) ２つのデータの箱ひげ図を並べてかけ。

(3) それぞれのデータの範囲，および四分位範囲を求め，それらをもとに，データの散らばりの度合いを比較せよ。

[解答]

(1) 書店 A のデータについて

第 1 四分位数は $Q_1=3$（冊）

第 2 四分位数は $Q_2=\dfrac{4+5}{2}=4.5$（冊）

第 3 四分位数は $Q_3=8$（冊）

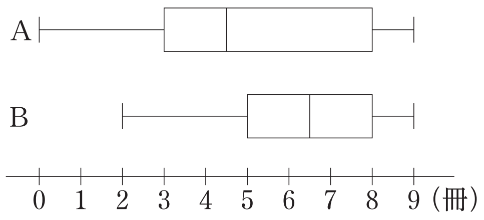
書店 B のデータについて

第 1 四分位数は $Q_1=5$（冊）

第 2 四分位数は $Q_2=\dfrac{6+7}{2}=6.5$（冊）

第 3 四分位数は $Q_3=8$（冊）

(2)



(3) 書店 A のデータの範囲は $9-0=9$（冊）

書店 B のデータの範囲は $9-2=7$（冊）

書店 A のデータの四分位範囲は $Q_3-Q_1=5$（冊）

書店Ｂのデータの四分位範囲は $Q_3 - Q_1 = 3$（冊）

よって，書店Ａの方が範囲，四分位範囲ともに大きいことから，書店Ａの方が散らばりの度合いが大きいと考えられる。

PART3 分散と標準偏差

3 次のデータは，8人の生徒が2か月の間に読んだ本の冊数 x(冊)である。

1，3，6，5，8，1，6，2

(1) このデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

(2) このデータの分散 s^2 を求めよ。

(3) このデータの標準偏差 s を求めよ。

[解答]

(1) $\overline{x}=\dfrac{1}{8}(1+3+6+5+8+1+6+2)=\dfrac{32}{8}=4$ (冊)

(2) $s^2=\dfrac{1}{8}\{(-3)^2+(-1)^2+2^2+1^2+4^2+(-3)^2+2^2+(-2)^2\}=\dfrac{48}{8}=6$

(別解) $\overline{x^2}=\dfrac{1}{8}(1^2+3^2+6^2+5^2+8^2+1^2+6^2+2^2)=\dfrac{176}{8}=22$

よって，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=22-4^2=6$

(3) $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{6}$ (冊)

PART4 データの相関

4 次の表は，2つの変量 x，y からなるデータである。

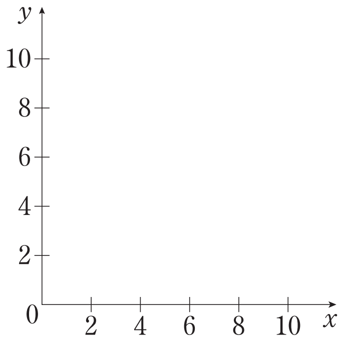
x	3	2	7	6	8	4	9	1	3	7
y	8	9	5	4	1	6	2	7	5	3

(1) 散布図をかき，x，y の間に相関があるか調べよ。また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関があると考えられるかを答えよ。

(2) (1)の散布図から，このデータの x と y の相関係数 r に最も近いものを次の①～④から1つ選べ。

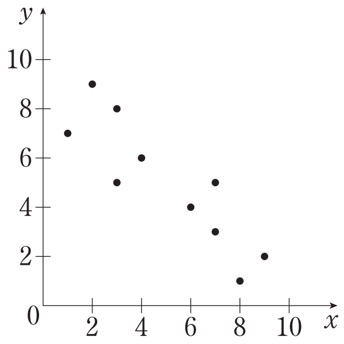
①　-0.31　　②　-0.88　　③　0.25　　④　0.92

〈散布図〉



[解答]

(1)



負の相関がある

(2) 強い負の相関がみられる。よって，相関係数 r の値は -1 に近い。

したがって　②

PART5 外れ値

5 次のデータ A は, あるゲームの 10 回分の得点の記録を, 値の小さい順に並べたものである。

1, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 10, 13

(1) データ A の平均値, および四分位数を求めよ。

(2) 次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1, 第 3 四分位数を Q_3 とするとき,
> $Q_1-1.5(Q_3-Q_1)$ 以下の値または $Q_3+1.5(Q_3-Q_1)$ 以上の値

データ A において, 外れ値である値を求めよ。また, データ A から外れ値である値を除いたデータにおいて, 平均値を求めよ。

[解答]

(1) 平均値は $\dfrac{1}{10}(1+3+4+4+5+5+6+7+10+13)=\dfrac{58}{10}=5.8$

第 2 四分位数は $Q_2=\dfrac{5+5}{2}=5$

第 1 四分位数は $Q_1=4$

第 3 四分位数は $Q_3=7$

(2) $Q_1-1.5(Q_3-Q_1)=4-1.5\times(7-4)=-0.5$

$Q_3+1.5(Q_3-Q_1)=7+1.5\times(7-4)=11.5$

よって, 外れ値は -0.5 以下の値または 11.5 以上の値である。

したがって, 外れ値は 13

値 13 を除いたデータ

1, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 10

の平均値は $\dfrac{1}{9}(1+3+4+4+5+5+6+7+10)=\dfrac{45}{9}=5$

PART6 仮説検定

6 あるコインを 6 回投げたところ, 表が 5 回出た。この結果から, このコインは表が出やすい, と判断してよいか。基準となる確率を 0.05 として, 仮説検定を行うことによって考察せよ。ただし，表と裏が出る確率がともに 0.5 であるコインを 6 回投げて表が出た回数を記録する操作を 1000 セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	0	1	2	3	4	5	6	計
度数	16	90	229	320	235	96	14	1000

[解答]

仮説①「このコインは表が出やすい」

仮説②「このコインは表と裏がかたよりなく出る」，つまり「このコインの表と裏が出る確率がともに 0.5 である」

表より，表が 5 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{96+14}{1000}=0.11$$

よって, このコインを 6 回投げて, 表が 5 回以上出る確率は 0.11 と考えられ, 基準となる確率 0.05 より大きい。したがって，仮説②が誤りとはいえない(正しいともいえない)。

したがって，仮説①は正しいとはいえない。

ゆえに，このコインは表が出やすいとは判断できない。

第 1 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：④，イ：3

[解説]

「x に着目する」と指示があるので，y は数と同様に扱う。

$$-4x^3y^2 = \underbrace{-4y^2}_{\text{係数}} \times \underbrace{x^3}_{\text{次数}}$$ [A]

係数…$-4y^2$，次数…3

[A]「係数」は単項式の数の部分である。y は数として扱う。

2

[正解] ウ：③，エ：2

[解説]

「y に着目する」と指示があるので，x は数と同様に扱う。

$$-4x^3y^2 = \underbrace{-4x^3}_{\text{係数}} \times \underbrace{y^2}_{\text{次数}}$$ [B]

係数…$-4x^3$，次数…2

[B]「係数」は単項式の数の部分である。x は数として扱う。

3

[正解] オ：2，カ：④

[解説]

「x に着目する」と指示があるので，y は数と同様に扱う。

$$4x^2 + x \underbrace{-5y^3 - 2}_{\text{定数項}}$$ [C]

x に着目すると，**2 次式**。

定数項は，$-5y^3-2$

[C]　着目する文字によって項の扱いが変わることに注意しよう。

4 **[正解]** キ：3，ク：③

[解説]

「y に着目する」と指示があるので，x は数と同様に扱う。

$$4x^2+x-5y^3-2=-5y^3\underbrace{+4x^2+x-2}_{\text{定数項}}$$ [D]

[D]　着目する文字によって項の扱いが変わることに注意しよう。

y に着目すると，**3 次式**。

定数項は，$\boldsymbol{4x^2+x-2}$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：6，ウ：5

[解説]

$$5a^3\underline{-4}\underline{+a^2}\underline{-7a^2}+5a\underline{+9}=\mathbf{5a^3-6a^2+5a+5}$$ [A]

（$+a^2$ と $-7a^2$ が同類項，-4 と $+9$ が同類項）

[A]　文字の部分が同じ項（同類項）をまとめる。

2

[正解] エ：②

[解説]

$$x^3\underline{+3xy}\boxed{+4y^2}\underline{-2x}\boxed{+7y-8}$$ [B]

（$+3xy$ と $-2x$ が x の項，$+4y^2$ と $+7y-8$ が定数項）

$$=\mathbf{x^3+(3y-2)x+4y^2+7y-8}$$

[B]　「x について」と指示があるので，y は定数とみなす。

3

[正解] オ：③

[解説]

$$\boxed{x^3}+\underline{3xy}\underline{+4y^2}\boxed{-2x}\underline{+7y}\boxed{-8}$$ [C]

（x^3，$-2x$，-8 が定数項，$3xy$，$+4y^2$，$+7y$ が y の項）

$$=\mathbf{4y^2+(3x+7)y+x^3-2x-8}$$

[C]　「y について」と指示があるので，x は定数とみなす。

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：6

[解説]

$$A+B=(3x^2+4x-1)+(x^2-2x-5)$$
$$=3x^2+4x-1+x^2-2x-5 \quad \text{[A]}$$
$$=\mathbf{4x^2+2x-6}$$

[A]　加法は，そのまま括弧をはずす。その後，同類項をまとめる。

2

[正解] ウ：2，エ：6，オ：4

[解説]

$$A-B=(3x^2+4x-1)-(x^2-2x-5)$$
$$=3x^2+4x-1-x^2+2x+5 \quad \text{[B]}$$
$$=\mathbf{2x^2+6x+4}$$

[B]　減法は，引く式の各項の係数の符号をすべて変えて括弧をはずす。その後，同類項をまとめる。

3

[正解] カ：7，キク：16，ケ：7

[解説]

$$3A-2B=3(3x^2+4x-1)-2(x^2-2x-5)$$
$$=9x^2+12x-3-2x^2+4x+10 \quad \text{[C]}$$
$$=\mathbf{7x^2+16x+7}$$

[C]　括弧をつけて，A，B を代入し，括弧をはずし，同類項をまとめる。

4

[正解] コサ：-8，シス：10

[解説]

$$(-2x^2)^3\times x^4=(-2)^3(x^2)^3\times x^4 \quad \text{[D]}$$
$$=-8\times x^6\times x^4$$
$$=\mathbf{-8x^{10}}$$

[D]　指数法則
① $a^m\times a^n=a^{m+n}$
② $(a^m)^n=a^{mn}$
③ $(ab)^n=a^nb^n$

5 **[正解]** セソ：48，タ：5，チ：5

[解説]

$$3xy^3\times(-4x^2y)^2=3xy^3\times(-4)^2(x^2)^2\times y^2$$ [E]

$$=3xy^3\times16x^4y^2$$

$$=\mathbf{48x^5y^5}$$

[E]　指数法則
① $a^m\times a^n=a^{m+n}$
② $(a^m)^n=a^{mn}$
③ $(ab)^n=a^nb^n$

6 **[正解]** ツ：6，テ：8

[解説]

$$\boxed{2x}(3x^2+4x)=\boxed{2x}\times3x^2+\boxed{2x}\times4x$$ [F]

$$=\mathbf{6x^3+8x^2}$$

[F]　分配法則
① $A(B+C)=AB+AC$
② $(A+B)C=AC+BC$

7 **[正解]** ト：6，ナ：9

[解説]

$$(a^2+2ab-3b)\times\boxed{3ab}$$

$$=a^2\times\boxed{3ab}+2ab\times\boxed{3ab}-3b\times\boxed{3ab}$$ [G]

$$=\mathbf{3a^3b+6a^2b^2-9ab^2}$$

[G]　分配法則
① $A(B+C)=AB+AC$
② $(A+B)C=AC+BC$

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イ：9

[解説]

$(x+3)^2=x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$ [A]

$=\boldsymbol{x^2+6x+9}$

[A]　展開の公式
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2

[正解] ウ：4，エ：4

[解説]

$(2x-1)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2$ [B]

$=\boldsymbol{4x^2-4x+1}$

[B]　展開の公式
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3

[正解] オカ：16

[解説]

$(x+4y)(x-4y)=x^2-(4y)^2$ [C]

$=\boldsymbol{x^2-16y^2}$

[C]　展開の公式
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

4

[正解] キ：5，ク：6

[解説]

$(x-2a)(x-3a)$

$=x^2+\{(-2a)+(-3a)\}x+(-2a)\cdot(-3a)$ [D]

$=\boldsymbol{x^2-5ax+6a^2}$

[D]　展開の公式
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

5

[正解] ケ：5，コサ：12

[解説]

$(2x-3)(x+4)$

$=2\cdot 1x^2+\{2\cdot 4+(-3)\cdot 1\}x+(-3)\cdot 4$ [E]

$=\boldsymbol{2x^2+5x-12}$

[E]　展開の公式
$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

6 [正解] シ：3，スセ：10，ソ：8

[解説]

$(x+2y)(3x+4y)$

$=1\cdot 3x^2+(1\cdot 4y+2y\cdot 3)x+2y\cdot 4y$ [F]

$=\mathbf{3x^2+10xy+8y^2}$

[F]　展開の公式
$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

7 [正解] タ：2，チ：3，ツ：3，テト：10

[解説]

$x+y=A$ とおくと，[G]

$(x+y-2)(x+y+5)$

$=(A-2)(A+5)$

$=A^2+3A-10$

$=(x+y)^2+3(x+y)-10$

$=\mathbf{x^2+2xy+y^2+3x+3y-10}$

[G]　括弧の中の共通な式を，別の文字でおき換える。

8 [正解] ナ：4，ニ：4，ヌ：6，ネノ：12，ハ：9

[解説]

$a+2b=A$ とおくと，[H]

$(a+2b-3)^2$

$=(A-3)^2$

$=A^2-6A+9$

$=(a+2b)^2-6(a+2b)+9$

$=\mathbf{a^2+4ab+4b^2-6a-12b+9}$

[H]　括弧の中の一部の式を，別の文字でおき換える。

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：3

[解説]

$6xy^2-9y^3=\boxed{3y^2}\times 2x-\boxed{3y^2}\times 3y$

共通因数

$=\boxed{\boldsymbol{3y^2}}(\boldsymbol{2x-3y})$ [A]

[A]　共通因数 $3y^2$ をくくり出す。

2 **[正解]** エ：4，オ：2，カ：3

[解説]

$4a^2b+8ab^2-12ab$

$=\boxed{4ab}\times a+\boxed{4ab}\times 2b-\boxed{4ab}\times 3$

共通因数

$=\boxed{\boldsymbol{4ab}}(\boldsymbol{a+2b-3})$ [B]

[B]　共通因数 $4ab$ をくくり出す。

3 **[正解]** キ：3，ク：5

[解説]

$a+3=A$ とおくと，

$(\underbrace{\boxed{a+3}}_{A})x+5(\underbrace{\boxed{a+3}}_{A})=Ax+5A$ [C]

$=A(x+5)$

$=\boldsymbol{(a+3)(x+5)}$

[C]　$a+3$ が共通因数となるので，これを A とおく。

4 **[正解]** ケ：2

[解説]

$x-y=A$ とおくと，

$a(x-y)+2(y-x)=a(\underbrace{\boxed{x-y}}_{A})-2(\underbrace{\boxed{x-y}}_{A})$ [D]

$=aA-2A$

$=A(a-2)$

$=\boldsymbol{(x-y)(a-2)}$

[D]　$y-x \rightarrow -(x-y)$
と変形し，$x-y$ を共通因数とする。

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3

[解説]

$$x^2+6xy+9y^2=x^2+2\cdot x\cdot 3y+(3y)^2 \quad \text{[A]}$$
$$=\boldsymbol{(x+3y)^2}$$

[A]　因数分解の公式
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

2

[正解] イ：2，ウ：5

[解説]

$$4x^2-20xy+25y^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 5y+(5y)^2 \quad \text{[B]}$$
$$=\boldsymbol{(2x-5y)^2}$$

[B]　因数分解の公式
$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

3

[正解] エ：3，オ：5，カ：3，キ：5

[解説]

$$9x^2-25=(3x)^2-5^2=\boldsymbol{(3x+5)(3x-5)} \quad \text{[C]}$$

[C]　因数分解の公式
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4

[正解] ク：7，ケ：7

[解説]

$$a^2-49b^2=a^2-(7b)^2=\boldsymbol{(a+7b)(a-7b)} \quad \text{[D]}$$

[D]　因数分解の公式
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

5

[正解] コ：1，サ：7

[解説]

$$x^2+8x+7$$

積が 7，和が 8 となる 2 数は 1，7 だから，

$$x^2+8x+7=\boldsymbol{(x+1)(x+7)} \quad \text{[E]}$$

[E]　因数分解の公式
$x^2+(a+b)x+ab$
$=(x+a)(x+b)$

6 [正解] シ：3，ス：5

[解説]

$$x^2-2x-15$$

積が -15，和が -2 となる 2 数は 3，-5 だから，

$$x^2-2x-15=\boldsymbol{(x+3)(x-5)}$$ [F]

> [F]　因数分解の公式
> $x^2+(a+b)x+ab$
> $=(x+a)(x+b)$

7 [正解] セ：2，ソ：5

[解説]

$$x^2-7xy+10y^2=x^2-7y\cdot x+10y^2$$

積が $10y^2$，和が $-7y$ となる 2 式は

$-2y$，$-5y$ だから，

$$x^2-7xy+10y^2=\boldsymbol{(x-2y)(x-5y)}$$ [G]

> [G]　因数分解の公式
> $x^2+(a+b)x+ab$
> $=(x+a)(x+b)$

8 [正解] タ：6，チ：2

[解説]

$$x^2+4xy-12y^2=x^2+4y\cdot x-12y^2$$

積が $-12y^2$，和が $4y$ となる 2 式は

$6y$，$-2y$ だから，

$$x^2+4xy-12y^2=\boldsymbol{(x+6y)(x-2y)}$$ [H]

> [H]　因数分解の公式
> $x^2+(a+b)x+ab$
> $=(x+a)(x+b)$

第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：3

[解説]

$2x^2+5x+3=(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{2x+3})$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \rightarrow & 2 \\ 2 & & 3 & \rightarrow & 3 \\ \hline 2 & & 3 & & 5 \end{array}$$

[A]

x^2の係数　定数項　xの係数

> [A]　たすきがけ
> $acx^2+(ad+bc)x+bd$
> $=(ax+b)(cx+d)$
> $$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

2

[正解] エ：1，オ：3，カ：4

[解説]

$3x^2-x-4=(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{3x-4})$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 1 & \rightarrow & 3 \\ 3 & & -4 & \rightarrow & -4 \\ \hline 3 & & -4 & & -1 \end{array}$$

[B]

> [B]　たすきがけ
> $acx^2+(ad+bc)x+bd$
> $=(ax+b)(cx+d)$
> $$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

3

[正解] キ：2，ク：5，ケ：3

[解説]

$5x^2+7x-6=(\boldsymbol{x+2})(\boldsymbol{5x-3})$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \rightarrow & 10 \\ 5 & & -3 & \rightarrow & -3 \\ \hline 5 & & -6 & & 7 \end{array}$$

[C]

> [C]　たすきがけ
> $acx^2+(ad+bc)x+bd$
> $=(ax+b)(cx+d)$
> $$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

4

[正解] コ：2，サ：5，シ：3，ス：2

[解説]

$6x^2-11x-10=(\boldsymbol{2x-5})(\boldsymbol{3x+2})$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -5 & \rightarrow & -15 \\ 3 & & 2 & \rightarrow & 4 \\ \hline 6 & & -10 & & -11 \end{array}$$

[D]

> [D]　たすきがけ
> $acx^2+(ad+bc)x+bd$
> $=(ax+b)(cx+d)$
> $$\begin{array}{ccccc} a & \times & b & \rightarrow & bc \\ c & & d & \rightarrow & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

5 [正解] セ：2，ソ：4，タ：5

[解説]

$$8x^2+6xy-5y^2=8x^2+6y\cdot x-5y^2$$

$$=\boldsymbol{(2x-y)(4x+5y)}$$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -y & \to & -4y \\ 4 & & 5y & \to & 10y \\ \hline 8 & & -5y^2 & & 6y \end{array}$$

[E]

[E]　たすきがけ

$$acx^2+(ad+bc)x+bd$$

$$=(ax+b)(cx+d)$$

$$\begin{array}{ccccc} a & \diagdown\!\!\!\!\diagup & b & \to & bc \\ c & & d & \to & ad \\ \hline ac & & bd & & ad+bc \end{array}$$

第 2 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：5

[解説]

$x+y=A$ とおくと，

$(\boxed{x+y})^2+3(\boxed{x+y})-10$

$=A^2+3A-10$ [A]

$=(A-2)(A+5)$

$=\boldsymbol{(x+y-2)(x+y+5)}$

[A]　同じ式を 1 つのかたまりと見なし，文字で置き換える。

2

[正解] ウ：5，エ：3，オ：3

[解説]

$x^2=X$ とおくと，

$x^4-4x^2-45=X^2-4X-45$ [B]

$=(X+5)(X-9)$

$=(x^2+5)(x^2-9)$

$=\boldsymbol{(x^2+5)(x+3)(x-3)}$

[B]　$x^4=(x^2)^2=X^2$ となり，置き換えにより，X の 2 次式となる。

3

[正解] カ：2，キ：3

[解説]

$ab+3a+2b+6$

$=(\boxed{b+3})a+2(\boxed{b+3})$ [C]

共通因数

$=(b+3)(a+2)$

$=\boldsymbol{(a+2)(b+3)}$

[C]　a について整理する。

4 [正解] ク：3，ケ：2

[解説]

$x^2+xy+x+3y-6$

$=(x+3)y+\underline{x^2+x-6}$ [D]

$=(x+3)y+\underline{(x+3)(x-2)}$

$=(x+3)(y+x-2)$ [E]

$=\boldsymbol{(x+3)(x+y-2)}$

[D]　x は 2 次，y は 1 次だから，次数が低い方の y について整理する。

[E]　$x+3$ が共通因数となる。

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$$\frac{5}{6}=0.83333\cdots$$
$$=\mathbf{0.8\dot{3}}$$ [A]

[A]　循環する部分の最初の数字の上に・をつける。

2

[正解] イ：③

[解説]

$$\frac{4}{11}=0.363636\cdots$$
$$=\mathbf{0.\dot{3}\dot{6}}$$ [B]

[B]　「36」がくり返される。

3

[正解] ウ：5，エ：9

[解説]

$x=0.\dot{5}$ とおく。

$$10x=5.5555\cdots$$
$$-)\quad x=0.5555\cdots$$ [C]
$$9x=5$$
$$x=\mathbf{\frac{5}{9}}$$

[C]　循環小数を x とおき，循環している部分が 1 桁の場合，$10x$ で考える。

4

[正解] オ：5，カキ：37

[解説]

$x=0.\dot{1}3\dot{5}$ とおく。

$$1000x=135.135135135\cdots$$
$$-)\quad x=\quad 0.135135135\cdots$$ [D]
$$999x=135$$
$$x=\frac{135}{999}=\mathbf{\frac{5}{37}}$$

[D]　循環小数を x とおき，循環している部分が 3 桁の場合，$10^3x=1000x$ で考える。

第 3 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

$|7|=\mathbf{7}$ [A]

[A]　$|a|$ は，数直線上で原点と a の距離を表す。

2

[正解] イ：4

[解説]

$|-4|=\mathbf{4}$ [B]

[B]　$|a|$ は，数直線上で原点と a の距離を表す。

3

[正解] ウ：③

[解説]

$1-\sqrt{3}<0$ だから，

$$|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$$ [C]

[C]　$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

4

[正解] エ：5

[解説]

$AB=|6-1|$ [D]

$=|5|=\mathbf{5}$

[D]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) 間の距離は，
　$AB=|b-a|$

5

[正解] オ：6

[解説]

$AB=|3-(-3)|$ [E]

$=|6|=\mathbf{6}$

[E]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) 間の距離は，
　$AB=|b-a|$

6

[正解] カ：5

[解説]

$AB=|-7-(-2)|$ [F]

$=|-5|=\mathbf{5}$

[F]　数直線上の 2 点 A(a)，B(b) 間の距離は，
　$AB=|b-a|$

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2

[解説]

$\sqrt{6}\times\sqrt{3}=\sqrt{6\times3}$ [A]

$=\sqrt{3^2\times2}=\mathbf{3\sqrt{2}}$ [B]

> [A]　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

> [B]　$k>0$ のとき，
> $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

2

[正解] ウ：－，エ：2

[解説]

$\sqrt{8}-\sqrt{18}=\sqrt{2^2\times2}-\sqrt{3^2\times2}$ [C]

$=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=\mathbf{-\sqrt{2}}$

> [C]　$k>0$ のとき，
> $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

3

[正解] オ：5，カ：2，キ：6

[解説]

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$ [D]

$=3-2\sqrt{6}+2=\mathbf{5-2\sqrt{6}}$

> [D]　展開の公式
> $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
> を利用する。

4

[正解] ク：4

[解説]

$(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)=(\sqrt{5})^2-1^2=5-1=\mathbf{4}$ [E]

> [E]　展開の公式
> $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
> を利用する。

5

[正解] ケコ：15，サ：3

[解説]

$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{15}}{3}}$ [F]

> [F]　分母・分子に $\sqrt{3}$ をかけ，$(\sqrt{a})^2=a$ を利用し，分母を有理化する。

6 [正解] シ：7，ス：2，セ：5

[解説]

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{1\times(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} \quad \text{[G]}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{7-2}$$

$$=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$$

[G]　分母・分子に $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ をかけ，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ を利用し，分母を有理化する。

7 [正解] ソ：3，タ：5

[解説]

$$\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} \quad \text{[H]}$$

$$=\frac{4(3+\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{4(3+\sqrt{5})}{9-5}=3+\sqrt{5}$$

[H]　分母・分子に $3+\sqrt{5}$ をかけ，分母を有理化する。

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イウ：-2

[解説]

$2x+1>5x+7$

$-3x>6$

$x<-2$ [A]

[A]　両辺を -2（負の数）で割るので，不等号の向きが変わる。

2 **[正解]** エ：②，オ：7

[解説]

$5(x-1)<3(x+3)$

$5x-5<3x+9$

$2x<14$

$x<7$ [B]

[B]　両辺を 2（正の数）で割る。不等号の向きは変わらない。

3 **[正解]** カ：①，キ：3

[解説]

$0.3x+0.8\geqq -0.2x+2.3$

両辺に 10 を掛けると，[C]

$3x+8\geqq -2x+23$

$5x\geqq 15$

$x\geqq 3$

[C]　係数を整数にする。

4 **[正解]** ク：①，ケ：1

[解説]

$\frac{1}{3}x+1\leqq \frac{3}{2}x-\frac{1}{6}$

両辺に 6 を掛けて，[D]

$2x+6\leqq 9x-1$

$-7x\leqq -7$

$x\geqq 1$

[D]　分母 2，3，6 の最小公倍数の 6 を掛けて，係数を整数にする。

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

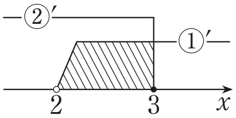
$$\begin{cases} 3x > 8 - x & \cdots\cdots① \\ x + 3 \geqq 5x - 9 & \cdots\cdots② \end{cases}$$ [A]

①より，$4x > 8$

$x > 2$　……①′

②より，$-4x \geqq -12$

$x \leqq 3$　……②′



①′，②′ の共通範囲を求めると，

$\boldsymbol{2 < x \leqq 3}$

> [A]　それぞれの不等式を解いて，共通範囲を求める。

2

[正解] イ：③

[解説]

$-x+6 \leqq 3x-2 < 6x+1$ は，

$$\begin{cases} -x+6 \leqq 3x-2 & \cdots\cdots① \\ 3x-2 < 6x+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$ [B]

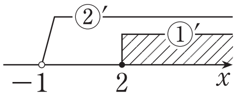
と同じである。

①より，$-4x \leqq -8$

$x \geqq 2$　……①′

②より，$-3x < 3$

$x > -1$　……②′



①′，②′ の共通範囲を求めると，

$\boldsymbol{x \geqq 2}$

> [B]　不等式 $A < B < C$ は，
> 連立不等式 $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases}$
> と同じである。

3 **[正解]** ウ：②

[解説]

会員になった場合の1回の入場料は,

$$3000\times\frac{8}{10}=2400\text{(円)}$$

x 回入場するとき，条件より,

$$3000x>5000+2400x \quad \text{[C]}$$

$$600x>5000$$

$$x>\frac{25}{3}=8.33\cdots$$

x は整数であるから，$x\geqq 9$

よって，会員になって **9回以上** 入場すれば，会員にならずに入場するよりも安くなる。

[C]　入場する回数を x としたとき,
会員にならずに入場するとき,
$3000x$（円）
会員になって入場するとき,
$5000+2400x$（円）

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

$|x|=2$ の解は，[A]

$\boldsymbol{x=\pm 2}$

[A]　$c>0$ のとき，
$|x|=c$ の解は，$x=\pm c$

2

[正解] イ：3，ウエ：-7

[解説]

$|x+2|=5$ の解は，

$x+2=\pm 5$ [B]

$x=-2\pm 5$

$\boldsymbol{x=-7,\ 3}$

[B]　$x+2=X$ とおくと，
$|X|=5$　より，
$X=\pm 5$

3

[正解] オカ：-4，キ：4

[解説]

$|x|<4$ の解は，[C]

$\boldsymbol{-4<x<4}$

[C]　$c>0$ のとき，
$|x|<c$ の解は，
$-c<x<c$

4

[正解] クケ：-1，コ：5

[解説]

$|x-2|<3$ の解は，[D]

$-3<x-2<3$

$2-3<x<2+3$ [E]

$\boldsymbol{-1<x<5}$

[D]　$x-2=X$ とおくと，
$|X|<3$　より，
$-3<X<3$

[E]　各辺に 2 を加える。

5

[正解] サシ：-5，ス：5

[解説]

$|x|\geqq 5$ の解は，[F]

$\boldsymbol{x\leqq -5,\ 5\leqq x}$

[F]　$c>0$ のとき，
$|x|\geqq c$ の解は，
$x\leqq -c,\ c\leqq x$

6 [正解] セ：1，ソ：5

[解説]

$|x-3| \geqq 2$ の解は，[G]

$x-3 \leqq -2$，$2 \leqq x-3$

$\boldsymbol{x \leqq 1}$，$\boldsymbol{5 \leqq x}$

[G]　$x-3=X$ とおくと，
$|X| \geqq 2$　より，
$X \leqq -2$，$2 \leqq X$

第 5 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：14，エオ：21，カキ：28

[解説]

1 以上 30 以下の 7 の倍数は，

7，14，21，28 [A]

だから，$A=\{\mathbf{7},\ \mathbf{14},\ \mathbf{21},\ \mathbf{28}\}$

[A]　要素：集合を構成する 1 つ 1 つのもの

2

[正解] ク：1，ケ：3，コ：5，サシ：15

[解説]

15 の正の約数は，

1，3，5，15 [B]

だから，$B=\{\mathbf{1},\ \mathbf{3},\ \mathbf{5},\ \mathbf{15}\}$

[B]　要素：集合を構成する 1 つ 1 つのもの

3

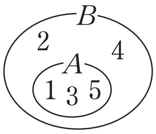
[正解] ス：①

[解説]

$A=\{1,\ 3,\ 5\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

よって，$\boldsymbol{A\subset B}$ [C]



[C]　A の要素が B にすべて含まれているとき，$A\subset B$ と表し，A は B の部分集合であるという。

4

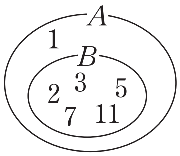
[正解] セ：②

[解説]

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$

$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ [D]

よって，$\boldsymbol{A\supset B}$ [E]



[D]　1 は素数ではない。

[E]　B の要素がすべて A に含まれている。

5

[正解] ソ：③

[解説]

$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ [F]

よって，$\boldsymbol{A=B}$

[F]　A と B の要素がすべて一致しているとき，A と B は等しいといい，$A=B$ と表す。

6 [正解] タ：①

[解説]

$A=\phi$ [G]

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

空集合は，どんな集合の部分集合でもあるから，

$\boldsymbol{A \subset B}$

[G]　集合 A は空集合である。
空集合は要素が 1 つもない集合である。

第 5 講　PART2 確認問題 解答

1

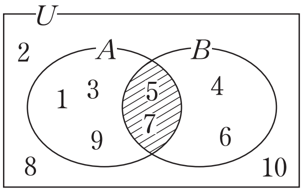
[正解] ア：5，イ：7

[解説]

$A\cap B$ は，右の図の斜線部分だから，[A]

$A\cap B=\{5,\ 7\}$

[B]



[A]　ベン図をかくとわかりやすい。

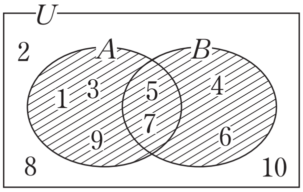
[B]　$A\cap B\cdots A$ と B の共通部分

2

[正解] ウ：3，エ：4，オ：5，カ：6，キ：7

[解説]

$A\cup B$ は，右の図の斜線部分だから，[C]



[C]　$A\cup B\cdots A$ と B の和集合

$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$

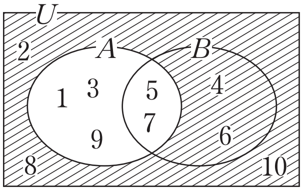
3

[正解] ク：2，ケ：4，コ：6，サ：8，シス：10

[解説]

$\overline{A}$ は，右の図の斜線部分だから，[D]

$\overline{A}=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$



[D]　$\overline{A}\cdots A$ の補集合

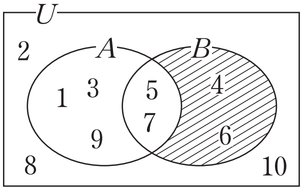
4

[正解] セ：4，ソ：6

[解説]

$\overline{A}\cap B$ は右の図の斜線部分だから，[E]

$\overline{A}\cap B=\{4,\ 6\}$



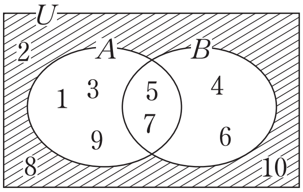
[E]　A の補集合と B の共通部分

5 [正解] タ：2，チ：8，ツテ：10

[解説]

$\overline{A \cup B}$ は，右の図の斜線部分だから，[F]

$\overline{A \cup B} = \{2, 8, 10\}$



[F]　$\overline{A \cup B}$ … $A \cup B$の補集合

6 [正解] ト：3，ナ：4，ニ：6，ヌ：8，ネ：9

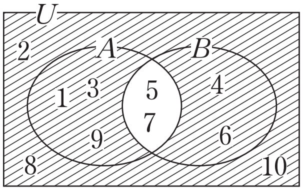
[解説]

ド・モルガンの法則により，

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$ [G]

$\overline{A \cap B}$ は，右の図の斜線部分だから，

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$



[G]　ド・モルガンの法則

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

第 5 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①

[解説]

$x=-3$ のとき，$x^2=(-3)^2=9$

よって，

「$x=-3$ ならば $x^2=9$」は真 [A]

[A]　命題が常に成り立つときは真である。

2　**[正解]** イ：②

[解説]

$x^2=2x$ のとき

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x=0,\ 2$$

よって，

「$x^2=2x$ ならば，$x=2$」は偽 [B]

反例：$x=0$

[B]　1 つでも成り立たないものがあるときは，偽となる。

3 [正解]ウ：②

[解説]

p：「n は10の正の約数」，q：「n は5の正の約数」とする。

p を満たす要素全体の集合を P

q を満たす要素全体の集合を Q とすると，

$P=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$

$Q=\{1,\ 5\}$

$n=2$ のとき，n は10の約数であるが，5の約数ではない。

よって，

「n は10の正の約数ならば，n は5の正の約数」は**偽** [C]

反例：$n=2$

[C]　1つでも成り立たないものがあるときは，偽となる。

4 [正解]エ：①

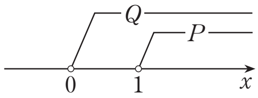
[解説]

p：「$x>1$」，q：「$x>0$」とし，

p を満たす要素全体の集合を P

q を満たす要素全体の集合を Q とすると，

$P\subset Q$



よって，

$p \Longrightarrow q$ は**真**である。[D]

[D]　$p \Longrightarrow q$ が真であることは，$P\subset Q$ が成り立つことと同じである。

5 [正解]オ：②

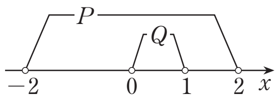
[解説]

p：「$-2<x<2$」，q：「$0<x<1$」とする。

p を満たす要素全体の集合を P

q を満たす要素全体の集合を Q とすると，

$P\subset Q$ でない。[E]



よって，

$p \Longrightarrow q$ は**偽**である。

[E]　$P\subset Q$ が成り立たないとき，$p \Longrightarrow q$ は偽である。

第 5 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

p：「$x=2$」，q：「$x^2=4$」とする。

$p \Longrightarrow q$ は，真

$q \Longrightarrow p$ は，偽（反例：$x=-2$）

よって，p は q であるための**十分条件であるが必要条件ではない。** [A]

[A]　$p \Longrightarrow q$ が真のとき，
p は q であるための十分条件
$q \Longrightarrow p$ が真のとき，
p は q であるための必要条件

2

[正解] イ：①

[解説]

p：「$x<1$」，q：「$2x+3<1$」とする。

$2x+3<1$ のとき，$x<-1$

$p \Longrightarrow q$ は，偽（反例：$x=0$）

$q \Longrightarrow p$ は，真

よって，p は q であるための**必要条件であるが十分条件ではない。** [B]

[B]　$p \Longrightarrow q$ が真のとき，
p は q であるための十分条件
$q \Longrightarrow p$ が真のとき，
p は q であるための必要条件

3

[正解] ウ：③

[解説]

p：「$x^2=25$」，q：「$|x|=5$」とする。

$x^2=25$ のとき，$x=\pm 5$

このとき，$|x|=5$ は成り立つ。

$|x|=5$ のとき，$x=\pm 5$

このとき，$x^2=25$ は成り立つ。

$p \Longrightarrow q$ は，真

$q \Longrightarrow p$ は，真

よって，p は q であるための**必要十分条件である。** [C]

[C]　$p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに真のとき，
p は q であるための必要十分条件

4 [正解] エ：④

[解説]

p：「$xy<0$」，q：「$x+y<0$」とする。

$p \Longrightarrow q$ は，偽 (反例：$x=2$，$y=-1$)

$q \Longrightarrow p$ は，偽 (反例：$x=-1$，$y=-2$)

よって，p は q であるための**必要条件でも十分条件でもない。** [D]

[D]　$p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに偽のとき，
p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

5 [正解] オ：③

[解説]

「x は正の数である」

この条件の否定は，

「x は正の数でない」 [E]

つまり，**x は 0 以下の数である。**

[E]　条件 p の否定は「$\overline{p}$ でない」

6 [正解] カ：③

[解説]

「$x=1$ かつ $y=2$」の否定は， [F]

$x \neq 1$ または $y \neq 2$

[F]　「p かつ q」の否定は，
「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」

7 [正解] キ：②

[解説]

「$x>0$ または $y \leqq 1$」の否定は， [G]

$x \leqq 0$ かつ $y>1$

[G]　「p または q」の否定は，
「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：④，ウ：③，エ：①，オ：②，
カ：②，キ：①

[解説]

命題 P は**真**である。

逆：**n が 3 の倍数ならば，n は 6 の倍数である** [A]

これは，**偽**である。（反例：$n=9$）

裏：**n が 6 の倍数でないならば，n は 3 の倍数でない**

逆が偽だから，裏も**偽**である。

対偶：**n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数でない**

P が真だから，対偶も**真**である。

> [A]　逆・裏・対偶
> 命題 $p \Rightarrow q$ の
> 逆　$q \Rightarrow p$
> 裏　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
> 対偶　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
> 命題とその対偶の真偽は一致する。また，逆と裏の真偽は一致する。

2

[正解] ク：④，ケ：②，コ：③，サ：②，シ：①，
ス：①，セ：②

[解説]

逆：**$x^2 \neq x$ ならば，$x \neq 1$ である**

これは，**真**である。 [B]

裏：**$x=1$ ならば，$x^2=x$ である**

これは，**真**である。

対偶：**$x^2=x$ ならば，$x=1$ である**

これは**偽**である。（反例：$x=0$）

対偶は偽だから，命題 P は偽である。

> [B]　逆・裏・対偶
> 命題 $p \Rightarrow q$ の
> 逆　$q \Rightarrow p$
> 裏　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
> 対偶　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
> 命題とその対偶の真偽は一致する。また，逆と裏の真偽は一致する。

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：①，ウ：①，エ：③，オ：①

[解説]

与えられた命題の対偶は，[A]

n が**偶数**ならば，n^2 は**偶数**である

これを証明する。

n が偶数のとき，n は整数 k を用いて $n=\boldsymbol{2k}$ と表される。このとき，

$$n^2=4k^2=\boldsymbol{2\cdot 2k^2}$$

$2k^2$ は整数であるから，n^2 は**偶数**である。

対偶が真であるから，もとの命題も真である。

> [A]　対偶を利用する証明
> 命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽が一致することを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

2

[正解] カ：①，キ：③，ク：②

[解説]

$3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，[B]

$3\sqrt{2}$ は**有理数**であるから，有理数である r を用いて，

$$3\sqrt{2}=r$$

とおくと，

$$\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{r}{3}}$$

r が有理数であるから，$\frac{r}{3}$ も有理数であり，

$\sqrt{2}$ が**無理数**であることに矛盾する。

したがって，$3\sqrt{2}$ は無理数である。

> [B]　背理法
> 証明する命題が成り立たないと仮定し，その仮定のもとで矛盾を導くことで，立てた仮定が間違っている，よってもとの命題が成り立つ，とする証明方法。

第 7 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：－，イ：8，ウ：0，エ：8

[解説]

長方形の縦が $x$cm だから，

横は，$(8-x)$cm [A]

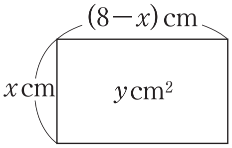
よって，$y=x(8-x)$

すなわち，$\boldsymbol{y=-x^2+8x}$

縦，横ともに正の数だから，

$$x>0 \quad かつ \quad 8-x>0$$ [B]

すなわち，$\boldsymbol{0<x<8}$



[A]　(横の長さ)＝8－(縦の長さ)

[B]　定義域とは，x のとりうる値の範囲のこと。

2

[正解] オカ：12

[解説]

$f(x)=-x^2+8x$ である。

$$f(2)=-2^2+8\cdot2=\boldsymbol{12}$$ [C]

[C]　関数 $y=f(x)$ において，$f(a)$ は $x=a$ のときの y の値である。$f(a)$ は，x に a を代入して求める。

3

[正解] キ：7

[解説]

$$f(7)=-7^2+8\cdot7=\boldsymbol{7}$$ [D]

[D]　関数 $y=f(x)$ において，$f(a)$ は $x=a$ のときの y の値である。$f(a)$ は，x に a を代入して求める。

4

[正解] ク：－，ケ：8

[解説]

$$f(t)=\boldsymbol{-t^2+8t}$$ [E]

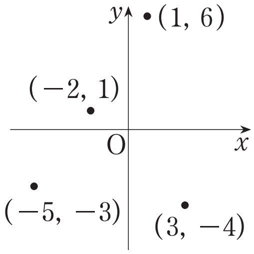
[E]　$f(t)$ は $f(x)$ の x に t を代入したものである。

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：4，ウ：1，エ：3

[解説]



[A]

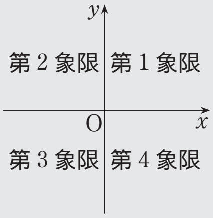
点 (−2, 1) は第 2 象限,

点 (3, −4) は第 4 象限

点 (1, 6) は第 1 象限,

点 (−5, −3) は第 3 象限

の点である。

> [A]　座標平面と象限
>
> 
>

2

[正解] オ：3，カ：9，キ：9，ク：3

[解説]

$y=-2x+5$ において,

$x=-2$ のとき，$y=9$ [B]

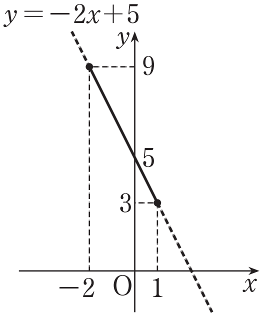
$x=1$ のとき，$y=3$

よって，グラフは右の図の実線部分である。 [C]

値域は，$3 \leqq y \leqq 9$

$x=-2$ のとき，最大値 9

$x=1$ のとき，　最小値 3



> [B]　定義域の端の点の y 座標を求める。

> [C]　$y=-2x+5$ のグラフは，傾き -2，切片 5 の直線である。

3 **[正解]** ケ：1，コ：3，サ：④，シ：①

[解説]

$y=\frac{1}{3}x+2$ において，

$x=-3$ のとき，$y=1$

$x=3$ のとき，$y=3$

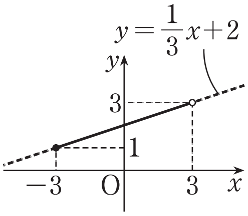
よって，グラフは右の図の

実線部分である。

値域は，$\mathbf{1 \leqq y < 3}$

最大値は，**ない** [D]

$x=-3$ のとき，最小値 **1**



[D]　$x=3$ のときの y は値域に含まれないので，最大値はない。

第 7 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：0，ウ：4，エ：③

[解説]

$y=-x^2+4$ のグラフは，

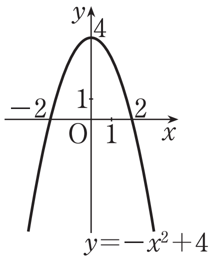
$y=-x^2$ のグラフを

y 軸方向に 4 だけ平行移動

したものである。 [A]

軸は，直線 $\boldsymbol{x=0}$

頂点は，点 $\boldsymbol{(0,\ 4)}$



[A]　$y=ax^2+q$ のグラフは，
$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したもの。
頂点は，点 $(0,\ q)$
軸は，直線 $x=0$

2

[正解] オ：0，カ：0，キク：-3，ケ：②

[解説]

$y=2x^2-3$ のグラフは，

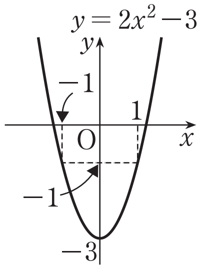
$y=2x^2$ のグラフを

y 軸方向に -3 だけ平行移動

したものである。 [B]

軸は，直線 $\boldsymbol{x=0}$

頂点は，点 $\boldsymbol{(0,\ -3)}$



[B]　$y=ax^2+q$ のグラフは，
$y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したもの。
頂点は，点 $(0,\ q)$
軸は，直線 $x=0$

3

[正解] コ：3，サ：3，シ：0，ス：①

[解説]

$y=2(x-3)^2$ のグラフは，

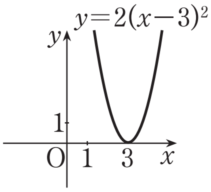
$y=2x^2$ のグラフを

x 軸方向に 3 だけ平行移動

したものである。 [C]

軸は，直線 $\boldsymbol{x=3}$

頂点は，点 $\boldsymbol{(3,\ 0)}$



[C]　$y=a(x-p)^2$ のグラフは，
$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したもの。
頂点は，点 $(p,\ 0)$
軸は，直線 $x=p$

4 **[正解]** セソ：-2，タチ：-2，ツ：0，テ：③

[解説]

$y=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2$ のグラフは，

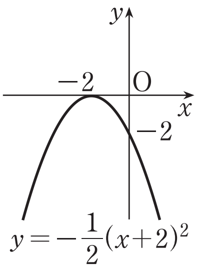
$y=-\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを

x 軸方向に -2 だけ平行移動

したものである。 [D]

軸は，直線 $\boldsymbol{x=-2}$

頂点は，点 $\boldsymbol{(-2,\ 0)}$



[D]　$y=a(x-p)^2$ のグラフは，
$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したもの。
頂点は，点 $(p,\ 0)$
軸は，直線 $x=p$

第 7 講　PART4 確認問題 解答

1

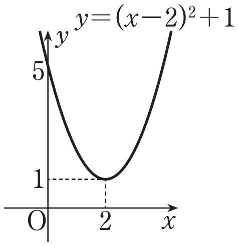
[正解] ア：2，イ：1，ウ：②

[解説]

$$y=(x-2)^2+1$$

グラフの頂点は，点 (2，1) [A]

グラフは下に凸である。



[A]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点は，点 $(p,\ q)$
$a>0$ のとき，下に凸
$a<0$ のとき，上に凸

2

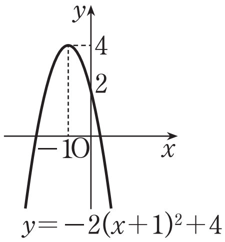
[正解] エオ：−1，カ：4，キ：②

[解説]

$$y=-2(x+1)^2+4$$
$$=-2\{x-(-1)\}^2+4$$

グラフの頂点は，点 (−1，4) [B]

グラフは上に凸である。



[B]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点は，点 $(p,\ q)$
$a>0$ のとき，下に凸
$a<0$ のとき，上に凸

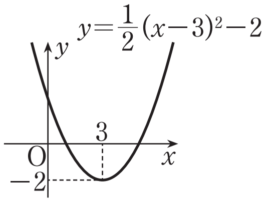
3 [正解] ク：3，ケコ：-2，サ：①

[解説]

$$y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$$

グラフの頂点は，点 $(3,\ -2)$ [C]

グラフは下に凸である。



[C]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点は，点 $(p,\ q)$
$a>0$ のとき，下に凸
$a<0$ のとき，上に凸

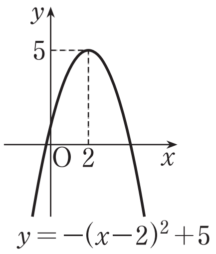
4 [正解] シ：2，ス：5，セ：③

[解説]

$$y=-(x-2)^2+5$$

グラフの頂点は，点 $(2,\ 5)$ [D]

グラフは上に凸である。



[D]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点は，点 $(p,\ q)$
$a>0$ のとき，下に凸
$a<0$ のとき，上に凸

第７講　PART5 確認問題 解答

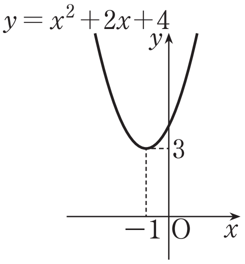
1

[正解] アイ：-1，ウ：3，エ：②

[解説]

$$y=x^2+2x+4$$
$$=(x+1)^2-1^2+4 \quad \text{[A]}$$
$$=(x+1)^2+3$$

グラフの頂点は，点 $(-1,\ 3)$



[A]　x^2+bx+c の平方完成

$$x^2+bx+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$$

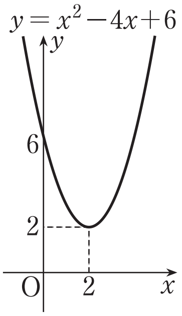
2

[正解] オ：2，カ：2，キ：②

[解説]

$$y=x^2-4x+6$$
$$=(x-2)^2-2^2+6 \quad \text{[B]}$$
$$=(x-2)^2+2$$

グラフの頂点は，点 $(2,\ 2)$



[B]　x^2+bx+c の平方完成

$$x^2+bx+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$$

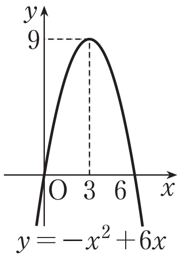
3

[正解] ク：3，ケ：9，コ：②

[解説]

$$y=-x^2+6x$$
$$=-(x^2-6x)$$ [C]
$$=-\{(x-3)^2-3^2\}$$
$$=-(x-3)^2+9$$

グラフの頂点は，点 (3，9)



[C]　まず「−」をかっこの外に出す。
2次関数
$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$
のグラフは
軸は　$x=-\dfrac{b}{2a}$
頂点は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

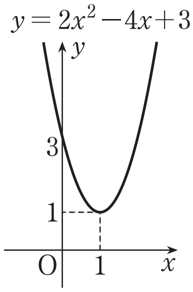
4

[正解] サ：1，シ：1，ス：①

[解説]

$$y=2x^2-4x+3$$
$$=2(x^2-2x)+3$$ [D]
$$=2\{(x-1)^2-1^2\}+3$$
$$=2(x-1)^2+1$$

グラフの頂点は，点 (1，1)



[D]　まず x^2 と x の項を x^2 の係数2でくくる。
2次関数
$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$
のグラフは
軸は　$x=-\dfrac{b}{2a}$
頂点は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

5 [正解] セソ：-1，タ：4，チ：③

[解説]

$$y=-3x^2-6x+1$$

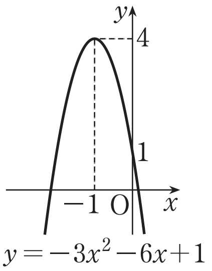
$$=-3(x^2+2x)+1 \quad \text{[E]}$$

$$=-3\{(x+1)^2-1^2\}+1$$

$$=-3(x+1)^2+4$$

[E]　まず x^2 と x の項を x^2 の係数 -3 でくくり，平方完成を行う。

グラフの頂点は，点 $(-1,\ 4)$



6 [正解] ツテ：-2，トナ：-3，ニ：③

[解説]

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

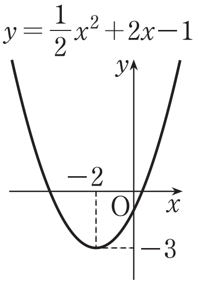
$$=\frac{1}{2}(x^2+4x)-1 \quad \text{[F]}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}-1$$

$$=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$$

[F]　まず x^2 と x の項を x^2 の係数 $\frac{1}{2}$ でくくり，平方完成を行う。

グラフの頂点は，点 $(-2,\ -3)$



第 7 講　PART6 確認問題 解答

1

[正解] ア：$-$，イ：8，ウエ：18

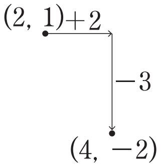
[解説]

$$y=-x^2+4x-3$$
$$=-(x-2)^2+1$$

より，頂点は点$(2,\ 1)$

この放物線を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，

頂点$(2,\ 1)$は点$(4,\ -2)$に移動する。 [A]



求める放物線の方程式は，

$$y=-(x-4)^2-2$$ [B]

すなわち，$\boldsymbol{y=-x^2+8x-18}$

[A]　頂点の座標を求め，頂点の移動を考える。

[B]　x^2 の係数は，元の式と同じ -1 である。

2

[正解] オ：3，カ：1

[解説]

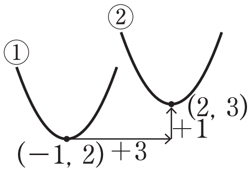
$$y=x^2+2x+3 \quad \cdots\cdots ①$$
$$=(x+1)^2+2$$

①の頂点は，点$(-1,\ 2)$ [C]

$$y=x^2-4x+7 \quad \cdots\cdots ②$$
$$=(x-2)^2+3$$

②の頂点は，点$(2,\ 3)$

点$(-1,\ 2)$を点$(2,\ 3)$に移動するには，x 軸方向に 3，y 軸方向に 1 だけ平行移動すればよい。 [D]



よって，放物線①を x 軸方向に **3**，y 軸方向に **1** だけ平行移動すれば，放物線②に重なる。

[C]　2 つの放物線の頂点の座標を求める。

[D]　頂点の移動を考える。

第 8 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イ：②

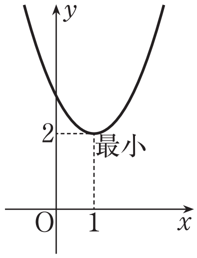
[解説]

$$y=(x-1)^2+2$$

$x=1$ のとき，

最小値 2

最大値は**ない**。



[A]

[A]　$y=a(x-p)^2+q$ よりグラフをかく。$a>0$ のとき，$x=p$ で最小値 q をとる。最大値はない。

2

[正解] ウ：④，エ：⑤

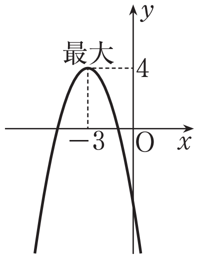
[解説]

$$y=-(x+3)^2+4$$

$x=-3$ のとき，

最大値 4

最小値は**ない**。



[B]

[B]　$y=a(x-p)^2+q$ よりグラフをかく。$a<0$ のとき，$x=p$ で最大値 q をとる。最小値はない。

3

[正解] オ：⑤，カ：①

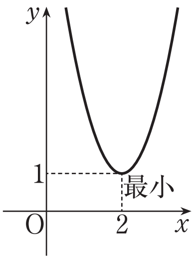
[解説]

$$\begin{aligned} y&=2x^2-8x+9\\ &=2(x^2-4x)+9\\ &=2\{(x-2)^2-4\}+9\\ &=2(x-2)^2+1 \end{aligned}$$ [C]

$x=2$ のとき，

最小値 1

最大値は**ない**。

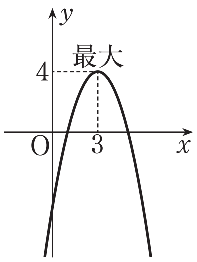


[C]　平方完成をし，$y=a(x-p)^2+q$ に変形，値の増減をグラフで調べる。

4 **[正解]** キ：④，ク：⑤

[解説]

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2+6x-5 \\
&= -(x^2-6x)-5 \\
&= -\{(x-3)^2-9\}-5 \\
&= -(x-3)^2+4 \quad \text{[D]}
\end{aligned}
$$



$x=3$ のとき，

最大値 4

最小値は**ない**。

[D]　平方完成をし，$y=a(x-p)^2+q$ に変形，値の増減をグラフで調べる。

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：0

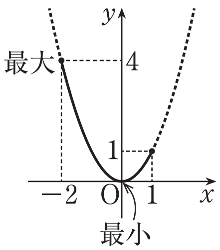
[解説]

$y = x^2$

$x = -2$ のとき，$y = 4$

$x = 1$ のとき，$y = 1$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は，[A]

$x = -2$ で最大値 4

$x = 0$ で最小値 0

をとる。

[A]　グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

2

[正解] ウ：8，エ：2

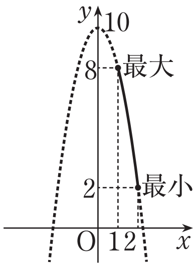
[解説]

$y = -2x^2 + 10$

$x = 1$ のとき，$y = 8$

$x = 2$ のとき，$y = 2$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は，[B]

$x = 1$ で最大値 8

$x = 2$ で最小値 2

をとる。

[B]　グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

3 [正解] オ：8，カ：4

[解説]

$y=x^2-2x+5$

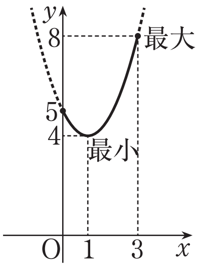
$=(x-1)^2-1+5$

$=(x-1)^2+4$ [C]

$x=0$ のとき，$y=5$

$x=3$ のとき，$y=8$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は，

$x=3$ で最大値 8

$x=1$ で最小値 4

をとる。

[C]　まず平方完成をする。
次に，グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

4 [正解] キ：9，ク：1

[解説]

$y=-x^2+4x+6$

$=-(x^2-4x)+6$

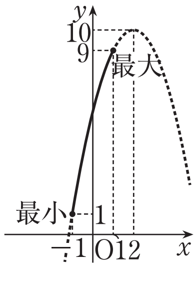
$=-\{(x-2)^2-4\}+6$

$=-(x-2)^2+10$ [D]

$x=-1$ のとき，$y=1$

$x=1$ のとき，$y=9$

よって，この関数のグラフは次の図の実線部分である。



したがって，この関数は

$x=1$ で最大値 9

$x=-1$ で最小値 1

をとる。

[D]　まず平方完成をする。
次に，グラフをかいて，定義域の端点と頂点に注目し，最大値，最小値を求める。

5 **[正解]** **ケ**：5，**コサ**：80，**シ**：5，**スセ**：20，

ソタ：10，**チツ**：70

[解説]

売り値を 60 円から x 円値上げしたときの 1 日の売り上げ高を y 円とする。

1 日に売れる個数は $(\mathbf{400-5x})$ 個だから，

$x \geqq 0$，$400-5x \geqq 0$ より，

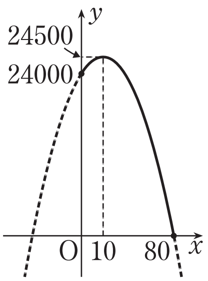
$$\mathbf{0 \leqq x \leqq 80} \quad \cdots\cdots①$$

y は，

$$y=(60+x)(400-5x) \quad \text{[E]}$$
$$=\mathbf{-5(x^2-20x-4800)}$$
$$=-5\{(x-10)^2-100-4800\}$$
$$=-5(x-10)^2+24500 \quad \text{[F]}$$

であり，①の範囲で y は $\mathbf{x=10}$ のとき最大値 24500 をとる。

よって，商品 A の売り値を **70 円**にしたときに売り上げ高が最大となる。



[E]　$y=$(売り値)×(個数)

[F]　定義域 $(0 \leqq x \leqq 80)$ での最大値を考える。

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：$-$，イ：4，ウ：3

[解説]

頂点が点(2，1)であることより，求める 2 次関数は，

$y=a(x-2)^2+1$ [A]

と表すことができる。

グラフが点(3，0)を通るから，

$0=a(3-2)^2+1$ [B]

$a=-1$

求める 2 次関数は，$y=-(x-2)^2+1$

すなわち，$\boldsymbol{y=-x^2+4x-3}$

[A]　頂点 $(p,\ q)$ が与えられているときは，$y=a(x-p)^2+q$ と表すことができる。

[B]　通る点の座標を代入。

2

[正解] エ：2，オ：4，カ：1

[解説]

軸の方程式が $x=1$ であることより，求める 2 次関数は，

$y=a(x-1)^2+q$ [C]

と表すことができる。

グラフが 2 点(0，1)，(3，7)を通るから，

$$\begin{cases} 1=a+q \\ 7=4a+q \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$q=-1$

求める 2 次関数は，$y=2(x-1)^2-1$

すなわち，$\boldsymbol{y=2x^2-4x+1}$

[C]　軸の方程式 $x=p$ が与えられているときは，$y=a(x-p)^2+q$ と表すことができる。

3 [正解] キ：2，ク：4，ケ：3

[解説]

求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。[D]

グラフが3点(0，3)，(1，1)，(−1，9)を通るから，

$$\begin{cases} 3=c & \cdots\cdots① \\ 1=a+b+c & \cdots\cdots② \\ 9=a-b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①を②，③に代入して整理すると，[E]

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=6 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-4$

求める2次関数は，$\boldsymbol{y=2x^2-4x+3}$

[D]　通る3点の座標が与えられているときは，$y=ax^2+bx+c$ と表すことができる。

[E]　c を消去して，a，b の連立方程式をつくる。

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-5，ウ：2

[解説]

$x^2+3x-10=0$

$(x+5)(x-2)=0$ [A]

$\boldsymbol{x=-5,\ 2}$

[A]　左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用する。

2

[正解] エ：5

[解説]

$x^2-10x+25=0$

$(x-5)^2=0$ [B]

$\boldsymbol{x=5}$

[B]　左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用する。

3

[正解] オカ：-3，キ：1，ク：2

[解説]

$2x^2+5x-3=0$

$(x+3)(2x-1)=0$ [C]

$\boldsymbol{x=-3,\ \frac{1}{2}}$

[C]　左辺が因数分解できるときは，因数分解を利用する。

4

[正解] ケ：3，コ：2

[解説]

$x^2-18=0$

$x^2=18$ [D]

$x=\pm\sqrt{18}$

$\boldsymbol{x=\pm 3\sqrt{2}}$

[D]　$x^2=k$ $(k>0)$ の解は，
$x=\pm\sqrt{k}$

5 **[正解]** サ：7，シス：37，セ：6

[解説]

$$3x^2-7x+1=0$$

解の公式より，

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3} \quad \text{[E]}$$

$$=\frac{\mathbf{7\pm\sqrt{37}}}{\mathbf{6}}$$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

6 **[正解]** ソタ：-3，チツ：11

[解説]

$$x^2+6x-2=0$$

解の公式より，

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot(-2)}}{1} \quad \text{[F]}$$

$$=\mathbf{-3\pm\sqrt{11}}$$

[F]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

判別式を D とすると,

$$D=5^2-4\cdot1\cdot2=17>0$$ [A]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**2 個**

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると,
$D=b^2-4ac$
$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解をもつ
$D=0 \iff$ 1 つの実数解(重解)をもつ
$D<0 \iff$ 実数解をもたない

2

[正解] イ：0

[解説]

判別式を D とすると,

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=-23<0$$ [B]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**0 個**

[B]　$D<0 \iff$ 実数解をもたない

3

[正解] ウ：1

[解説]

判別式を D とすると,

$$D=4^2-4\cdot4\cdot1=0$$ [C]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**1 個**

(別解)　$\dfrac{D}{4}=2^2-4\cdot1=0$ [D]

よって，2 次方程式の実数解の個数は，**1 個**

[C]　$D=0 \iff$ 1 つの実数解(重解)をもつ

[D]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると,
$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$

4 **[正解]** エ：④

[解説]

判別式を D とすると,

$$D=3^2-4\cdot 2\cdot m=9-8m$$

2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつための条件は $D>0$ だから, [E]

$$9-8m>0$$

$$m<\frac{9}{8}$$

[E]　異なる 2 つの実数解をもつ $\Longleftrightarrow$ $D>0$

第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-3，ウ：2

[解説]

$y=x^2+x-6$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，

$$x^2+x-6=0 \quad \text{[A]}$$

の実数解である。

これを解くと，

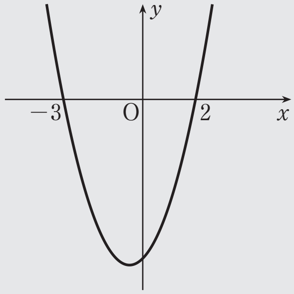
$$(x+3)(x-2)=0$$

$$x=-3,\ 2$$

よって，共有点の座標は，

$(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$

[A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$ax^2+bx+c=0$ の実数解。



2

[正解] エ：2，オ：3

[解説]

$y=-x^2+4x-1$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，

$$-x^2+4x-1=0 \quad \text{[B]}$$

の実数解である。

これを解くと，$x^2-4x+1=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-1}}{1}=2\pm\sqrt{3} \quad \text{[C]}$$

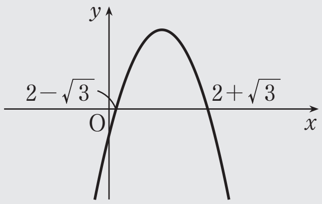
よって，共有点の座標は，

$(2+\sqrt{3},\ 0)$，$(2-\sqrt{3},\ 0)$

[B]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，$ax^2+bx+c=0$ の実数解。

[C]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$



3 [正解] カ：1

[解説]

$y=3x^2-6x+3$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は,

$$3x^2-6x+3=0$$ [D]

の実数解である。

これを解くと,

$$x^2-2x+1=0$$ [E]

$$(x-1)^2=0$$

$$x=1$$

よって，共有点の座標は，**(1，0)**

[D]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は, $ax^2+bx+c=0$ の実数解。

[E]　両辺を 3 で割る。

第 9 講　PART4 確認問題 解答

1 [正解] ア：③

[解説]

2 次方程式 $x^2+3x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$D=3^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$$ [A]

よって，グラフと x 軸の位置関係は，

共有点をもたない。

[A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べる。
$D>0 \iff$ 異なる 2 点で交わる
$D=0 \iff$ 接する
$D<0 \iff$ 共有点をもたない

2 [正解] イ：②

[解説]

2 次方程式 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$$ [B]

よって，グラフと x 軸の位置関係は，

接する。

[B]　$D=0 \iff$ 接する

3 [正解] ウ：①

[解説]

2 次方程式 $2x^2+3x+1=0$ の判別式を D とすると，

$$D=3^2-4\cdot2\cdot1=1>0$$ [C]

よって，グラフと x 軸の位置関係は，

異なる 2 点で交わる。

[C]　$D>0 \iff$ 異なる 2 点で交わる

4 [正解] エ：④

[解説]

2次方程式 $2x^2-4x+m=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(-4)^2-4\cdot 2\cdot m=16-8m$$

グラフが x 軸と異なる2点で交わるための条件は

$D>0$ である。 [D]

よって，

$$16-8m>0$$

$$-8m>-16$$

$$\boldsymbol{m<2}$$

[D]　$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる2点で交わる

第10講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-1，ウ：2

[解説]

$$(x+1)(x-2)>0$$

不等式の解は，[A]

$$\boldsymbol{x<-1,\ 2<x}$$

> [A]　$\alpha<\beta$ のとき，
> $(x-\alpha)(x-\beta)>0$
> の解は，$x<\alpha$，$\beta<x$

2

[正解] エ：0，オ：4

[解説]

$$x(x-4)<0$$

不等式の解は，[B]

$$\boldsymbol{0<x<4}$$

> [B]　$\alpha<\beta$ のとき，
> $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
> の解は，$\alpha<x<\beta$

3

[正解] カキ：-5，ク：2

[解説]

$$x^2+3x-10\geqq 0$$

$$(x+5)(x-2)\geqq 0$$

不等式の解は，[C]

$$\boldsymbol{x\leqq -5,\ 2\leqq x}$$

> [C]　$\alpha<\beta$ のとき，
> $(x-\alpha)(x-\beta)\geqq 0$
> の解は，$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$

4

[正解] ケコ：-2，サ：1，シ：3

[解説]

$$3x^2+5x-2\leqq 0$$

$$(x+2)(3x-1)\leqq 0 \quad \text{[D]}$$

不等式の解は，

$$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq \frac{1}{3}}$$

[D]

1	2 →	6
3	−1 →	−1
3	−2	5

5 **[正解]** ス：3，セ：5，ソ：3，タ：5

[解説]

$x^2-3x+1=0$ を解くと，

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$ [E]

[E]　左辺が因数分解できないときは，解の公式で解く。

よって，不等式 $x^2-3x+1>0$ の解は，

$$\boldsymbol{x<\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ \frac{3+\sqrt{5}}{2}<x}$$

6 **[正解]** チ：3，ツ：7，テ：3，ト：7

[解説]

$$-x^2+6x-2>0$$

両辺に -1 をかけて，[F]

[F]　x^2 の係数を正にする。

$$x^2-6x+2<0$$

$x^2-6x+2=0$ を解くと，$x=3\pm\sqrt{7}$

よって，不等式の解は，

$$\boldsymbol{3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}}$$

第 10 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

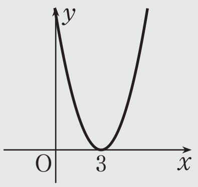
$x^2-6x+9>0$

$(x-3)^2>0$

不等式の解は，[A]

3 以外のすべての実数

[A]　$(x-\alpha)^2>0$ の解は，
α 以外のすべての実数
　$(x-\alpha)^2 \geqq 0$ の解は，
すべての実数



2

[正解] イ：①

[解説]

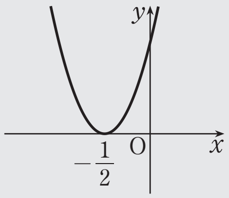
$4x^2+4x+1 \geqq 0$

$(2x+1)^2 \geqq 0$

不等式の解は，[B]

すべての実数

[B]　$(x-\alpha)^2>0$ の解は，
α 以外のすべての実数
　$(x-\alpha)^2 \geqq 0$ の解は，
すべての実数



3

[正解] ウ：④

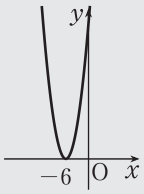
[解説]

$x^2+12x+36<0$

$(x+6)^2<0$ [C]

よって，不等式の解は**ない**。

[C]　$(x-\alpha)^2<0$ の解は
ない
　$(x-\alpha)^2 \leqq 0$ の解は，
$x=\alpha$



4 **[正解]** エ：③

[解説]

$$9x^2-6x+1 \leqq 0$$

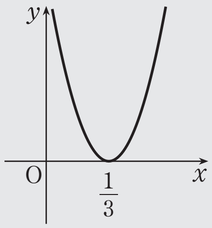
$$(3x-1)^2 \leqq 0$$ [D]

不等式の解は，

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{3}}$$

[D]　$(x-\alpha)^2<0$ の解はない

$(x-\alpha)^2 \leqq 0$ の解は，$x=\alpha$



第10講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

2 次方程式 $x^2-x+4=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$$

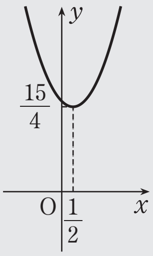
x^2 の係数は正であるから，不等式の解は，[A]

すべての実数

（別解）　$x^2-x+4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

よって，不等式の解は，**すべての実数**

[A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，
$ax^2+bx+c>0$ の解と，
$ax^2+bx+c\geqq0$ の解は，
　すべての実数



2

[正解] イ：①

[解説]

2 次方程式 $x^2+4x+7=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot7=-3<0$$ [B]

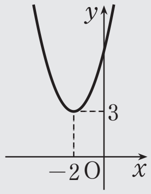
x^2 の係数は正であるから，不等式の解は，

すべての実数

（別解）　$x^2+4x+7=(x+2)^2+3>0$

よって，不等式の解は，**すべての実数**

[B]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，
$\frac{D}{4}=b'^2-ac$



3 [正解] ウ：②

[解説]

2 次方程式 $2x^2-4x+5=0$ の判別式を D とすると，

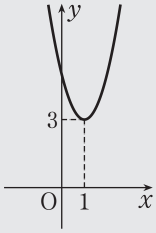
$$\frac{D}{4}=(-2)^2-2\cdot5=-6<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の**解はない。** [C]

（別解）　$2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3>0$

よって，不等式の**解はない。**

[C]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，
$ax^2+bx+c<0$ の解と，
$ax^2+bx+c\leqq0$ の解は，
　ない



4 [正解] エ：②

[解説]

$$-x^2+6x-10\geqq0$$

両辺に -1 をかけて，[D]

$$x^2-6x+10\leqq0$$

2 次方程式 $x^2-6x+10=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot10=-1<0$$

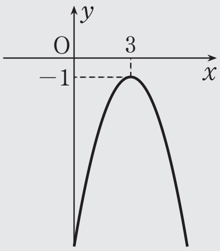
x^2 の係数は正であるから，不等式の**解はない。**

（別解）　$-x^2+6x-10=-(x-3)^2-1<0$ [E]

よって，不等式の**解はない。**

[D]　x^2 の係数を正にする。

[E]



第10講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-6，ウ：6

[解説]

2 次方程式 $3x^2+ax+3=0$ の判別式を D とすると，

$$D=a^2-4\cdot3\cdot3=a^2-36$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq0$ のときであるから，[A]

$$a^2-36\geqq0$$

$$(a+6)(a-6)\geqq0$$

よって，$\boldsymbol{a\leqq-6,\ 6\leqq a}$

> [A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
> $\Longleftrightarrow\quad D=b^2-4ac\geqq0$

2 **[正解]** エオ：-6，カ：2

[解説]

2 次関数 $y=-x^2+ax+a-3$ のグラフは上に凸の放物線である。よって，不等式の解がすべての実数となるのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。

2 次方程式 $-x^2+ax+a-3=0$ の判別式を D とすると，

$$D=a^2-4\cdot(-1)\cdot(a-3)$$

$$=a^2+4a-12$$

$$=(a-2)(a+6)$$

グラフが x 軸と共有点をもたない条件は $D<0$ であるから，[B]

$$(a-2)(a+6)<0$$

よって，$\boldsymbol{-6<a<2}$

> [B]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない
> $\Longleftrightarrow\quad D=b^2-4ac<0$

3 [正解] キ：1，ク：4

[解説]

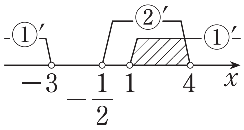
$$\begin{cases} x^2+2x-3>0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2-7x-4<0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①より，$(x+3)(x-1)>0$ [C]

$x<-3$，$1<x$ ……①′

②より，$(2x+1)(x-4)<0$

$-\dfrac{1}{2}<x<4$ ……②′



①′ と ②′ の共通範囲を求めて，

$\mathbf{1<x<4}$

[C]　それぞれの不等式を解く。

第11講　PART1 確認問題 解答

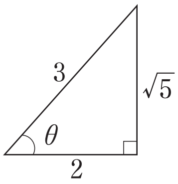
1 **[正解]** ア：④，イ：①，ウ：③

[解説]

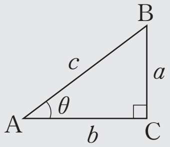
$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ [A]

$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$



[A]



$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{a}{c}$

$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{b}{c}$

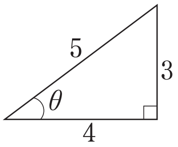
$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{a}{b}$

2 **[正解]** エ：③，オ：④，カ：②

[解説]

三平方の定理により，直角三角形のもう１辺の長さは，

$$\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}$$
$$=3$$



[B]

よって，

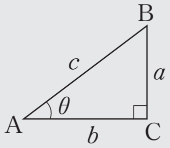
$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ [C]

$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

[B]　θ が左側，直角が右側にくるように図をかきかえるとわかりやすい。

[C]



$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{a}{c}$

$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{b}{c}$

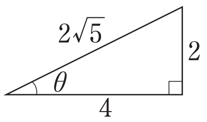
$\tan\theta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{a}{b}$

3 [正解] キ：③，ク：④，ケ：②

[解説]

三平方の定理により，直角三角形のもう１辺の長さは，

$$\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$$
$$=2\sqrt{5}$$



[D]

よって，

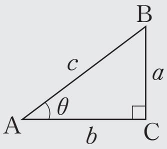
$$\sin\theta=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$ [E]

$$\cos\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$\tan\theta=\frac{2}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

[D]　θ が左側，直角が右側にくるように図をかきかえるとわかりやすい。

[E]



$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{a}{c}$$
$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{b}{c}$$
$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{a}{b}$$

第11講　PART2 確認問題 解答

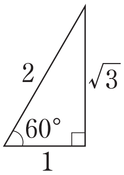
1

[正解] ア：④，イ：②，ウ：⑥

[解説]

$\theta = 60^\circ$ のとき，

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



[A]

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

[A]　30°，60°，90° の直角三角形の辺の比を利用する。

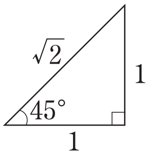
2

[正解] エ：③，オ：③，カ：①

[解説]

$\theta = 45^\circ$ のとき，

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



[B]

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = 1$$

[B]　45°，45°，90° の，直角二等辺三角形の辺の比を利用する。

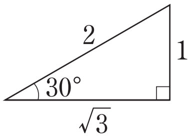
3

[正解] キ：②，ク：④，ケ：⑤

[解説]

$\theta = 30^\circ$ のとき，

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$



[C]

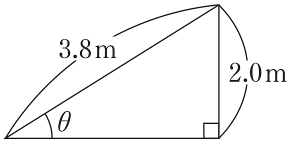
$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

[C]　30°，60°，90° の直角三角形の辺の比を利用する。

4 **[正解]** コサ：32

[解説]



図の直角三角形において，

$$\sin\theta = \frac{2.0}{3.8} = 0.5263\cdots$$ [D]

三角比の表により，$\sin\theta$ の値が 0.5263…に最も近い θ は，$\sin 32^\circ = 0.5299$ であるから，

$$\theta \fallingdotseq 32^\circ$$

よって，すべり台の傾斜の角 θ の大きさは，

およそ **32 度**

[D]　直角三角形の辺の長さに着目して，三角比の値を求める。
三角比の表を用いると，「長さ」の比から，およその「角度」が求められる。

第11講　PART3 確認問題 解答

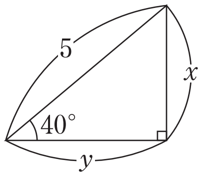
1　**[正解]** ア：①，イ：②

[解説]

図の直角三角形において，

$x = 5\sin 40^\circ$ [A]

$y = 5\cos 40^\circ$

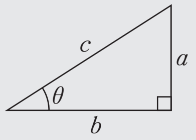


[A]　図の直角三角形において，

$a = c\sin\theta$

$b = c\cos\theta$

$a = b\tan\theta$

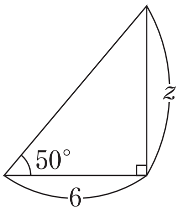


2　**[正解]** ウ：③

[解説]

図の直角三角形において，

$z = 6\tan 50^\circ$ [B]

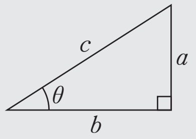


[B]　図の直角三角形において，

$a = c\sin\theta$

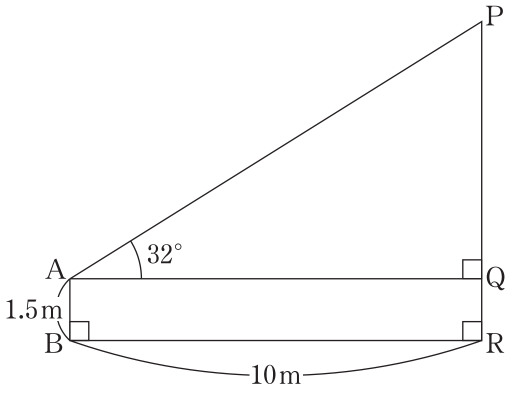
$b = c\cos\theta$

$a = b\tan\theta$



3　**[正解]** エ：7，オ：7

[解説]



上の図のように点 A，B，P，Q，R をとる。

直角三角形 APQ において，

$\mathrm{PQ} = \mathrm{AQ}\tan 32^\circ$ [C]

$= 10 \times 0.6249 = 6.249$ (m)

$\mathrm{QR} = \mathrm{AB} = 1.5$ m であるから，木の高さ PR は，

$\mathrm{PR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QR}$

$= 6.249 + 1.5 = 7.749 \fallingdotseq \mathbf{7.7}$ **(m)**

[C]　木の高さを PR として，PQ，QR に分けて求める。

第11講 PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：4，エ：3

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから，[A]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

θ は鋭角より，$\sin\theta>0$ であるから，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ [B]

$$=\frac{4}{5}\div\frac{3}{5}=\frac{4}{3}$$

> [A]　三角比の相互関係
> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

> [B]　三角比の相互関係
> $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2

[正解] オ：6，カ：3，キ：1，ク：3

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから，[C]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$$

$$=1+(\sqrt{2})^2=3$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから，

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

また，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから，[D]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

> [C]　三角比の相互関係
> $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

> [D]　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ から $\sin\theta$ を求める。

第11講　PART5 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$\sin 70° = \sin(90° - 20°)$ [A]

$= \mathbf{\cos 20°}$

[A]　$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

2

[正解] イ：①

[解説]

$\cos 65° = \cos(90° - 25°)$ [B]

$= \mathbf{\sin 25°}$

[B]　$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

3

[正解] ウ：②

[解説]

$\tan 80° = \tan(90° - 10°)$ [C]

$= \mathbf{\dfrac{1}{\tan 10°}}$

[C]　$\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

第12講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：④，ウ：⑨

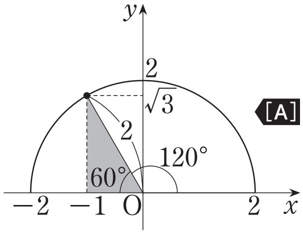
[解説]

$\theta = 120^\circ$ のとき，

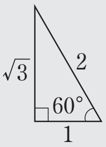
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

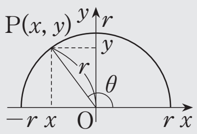
$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$ [B]



[A]　直角三角形の辺の比を利用する。



[B]



$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

2

[正解] エ：①，オ：⑥，カ：⑦

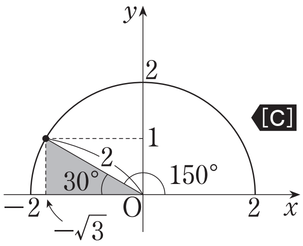
[解説]

$\theta = 150^\circ$ のとき，

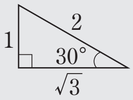
$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



[C]　直角三角形の辺の比を利用する。



3

[正解] キ：②，ク：⑤，ケ：⑧

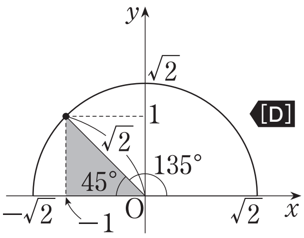
[解説]

$\theta = 135^\circ$ のとき，

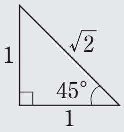
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\theta = -1$$



[D]　直角三角形の辺の比を利用する。

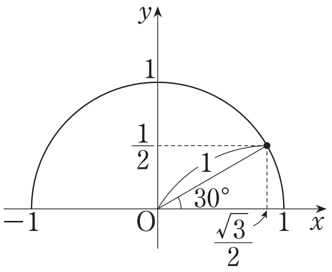


第12講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：①，ウ：①，エ：③

[解説]

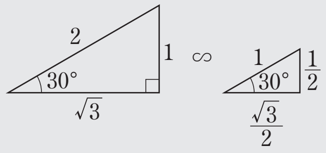


[A]

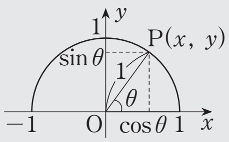
$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$ [B]

$\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[A]　直角三角形の辺の比を利用する。



[B]

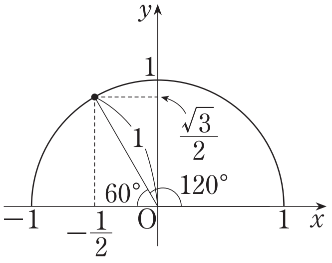


$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

2

[正解] オ：④，カ：③，キ：③，ク：④

[解説]

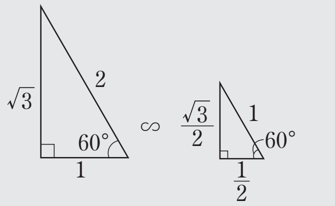


[C]

$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

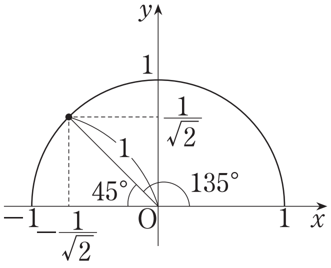
$\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$

[C]　直角三角形の辺の比を利用する。



3 [正解] ケ：⑤，コ：②，サ：②，シ：⑤

[解説]

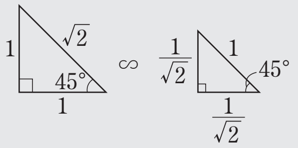


[D]

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

[D]　直角三角形の辺の比を利用する。



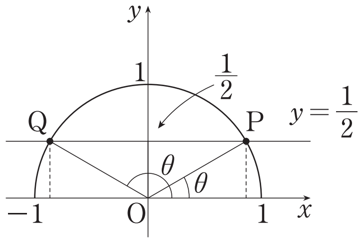
第12講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：⑥

[解説]

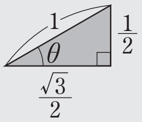
単位円の $y \geqq 0$ の部分において，y 座標が $\frac{1}{2}$ となるのは，下の図の点 P，Q である。



[A]

よって，求める θ は，$\boldsymbol{\theta = 30°,\ 150°}$

[A]　直角三角形の辺の比から，角度を求める。



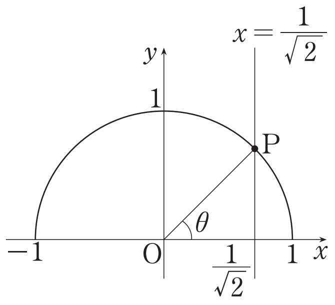
$\theta = 30°$

2

[正解] ウ：②

[解説]

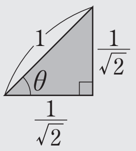
単位円の $y \geqq 0$ の部分において，x 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるのは，下の図の点 P である。



[B]

よって，求める θ は，$\boldsymbol{\theta = 45°}$

[B]　直角三角形の辺の比から，角度を求める。



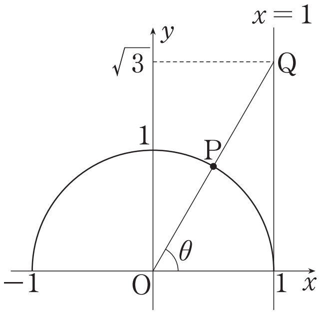
$\theta = 45°$

3 [正解] エ：③

[解説]

直線 $x=1$ 上に，点 $Q(1, \sqrt{3})$ をとる。

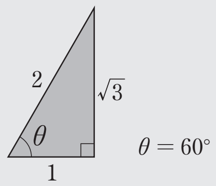
単位円の $y \geqq 0$ の部分と直線 OQ の交点は，下の図の点 P である。



[C]

よって，求める θ は，$\theta = 60°$

[C]　直角三角形の辺の比から，角度を求める。



第12講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ)$

$= \mathbf{\sin 20^\circ}$ [A]

[A]　$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

2

[正解] イ：④

[解説]

$\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ)$

$= \mathbf{-\cos 70^\circ}$ [B]

[B]　$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

3

[正解] ウ：②

[解説]

$\tan 140^\circ = \tan(180^\circ - 40^\circ)$

$= \mathbf{-\tan 40^\circ}$ [C]

[C]　$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

4

[正解] エ：③，オ：⑤

[解説]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，[D]

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\cos\theta < 0$ であるから，[E]

$\cos\theta = -\sqrt{\frac{9}{16}} = \mathbf{-\frac{3}{4}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ [D]

$= \frac{\sqrt{7}}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) = \mathbf{-\frac{\sqrt{7}}{3}}$

[D]　三角比の相互関係

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

[E]
θ が鋭角のとき，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$
θ が鈍角のとき，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$，$\tan\theta < 0$

5 [正解] カ：②，キ：⑥

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より，[F]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より，$\sin\theta\geqq0$ であるから，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ [F]

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}\div\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

[F]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

6 [正解] ク：④，ケ：②

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，[G]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$$

$$=1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{25}$$

$\tan\theta<0$ より，θ は鈍角であるから，

$$\cos\theta<0$$ [H]

よって，$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，[G]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

[G]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

[H]　$\cos\theta$ の符号に注意する。

第13講　PART1 確認問題 解答

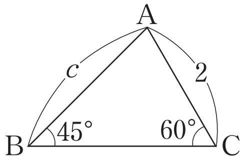
1

[正解] ア：6

[解説]

正弦定理より，

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$ [A]



$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=\frac{c}{\sin 60^\circ}$$

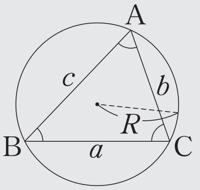
$$c=\frac{2}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=2\div\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{6}$$

[A]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



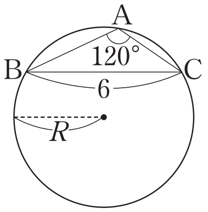
2

[正解] イ：2，ウ：3

[解説]

正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$ [B]



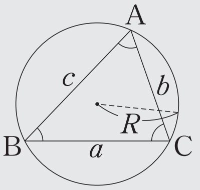
$$\frac{6}{\sin 120^\circ}=2R$$

$$R=\frac{3}{\sin 120^\circ}=3\div\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{2\sqrt{3}}$$

[B]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



3

[正解] エオ：45，カキク：135

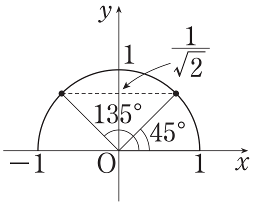
[解説]

正弦定理より，

$$\frac{b}{\sin B}=2R$$ [C]

$$\frac{2}{\sin B}=2\sqrt{2}$$

$$\sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



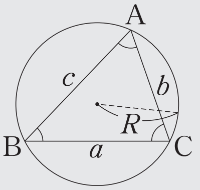
$0^\circ<B<180^\circ$ より，

$$\mathbf{B=45^\circ,\ 135^\circ}$$

[C]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



第13講　PART2 確認問題 解答

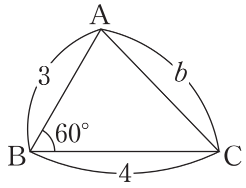
1

[正解] アイ：13

[解説]

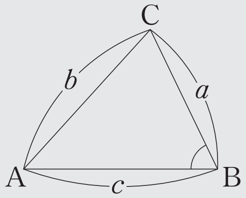
余弦定理より，

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \quad \text{[A]}$$
$$=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos60^\circ$$
$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{2}$$
$$=13$$



$b>0$ より，$\boldsymbol{b=\sqrt{13}}$

[A]　余弦定理
△ABC において，
$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$



2

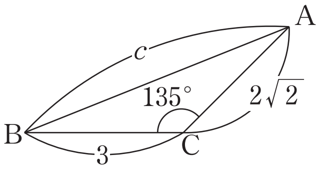
[正解] ウエ：29

[解説]

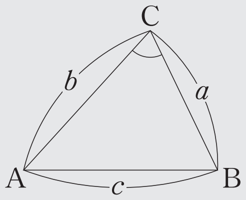
余弦定理より，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \quad \text{[B]}$$
$$=3^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cos135^\circ$$
$$=9+8-2\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$=29$$

$c>0$ より，$\boldsymbol{c=\sqrt{29}}$



[B]　余弦定理
△ABC において，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



第13講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：60

[解説]

余弦定理より，

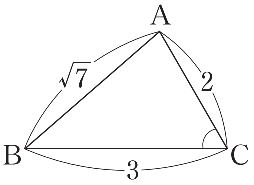
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\quad\text{[A]}$$

$$=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot3\cdot2}$$

$$=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

よって，

$\boldsymbol{C=60^\circ}$



[A]　余弦定理
△ABC において，
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
$\iff \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

2

[正解] ウ：8

[解説]

余弦定理より，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\quad\text{[B]}$$

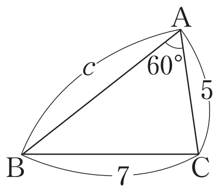
$$7^2=5^2+c^2-2\cdot5\cdot c\cos60^\circ$$

$$49=25+c^2-2\cdot5\cdot c\cdot\frac{1}{2}$$

$$c^2-5c-24=0$$

$$(c+3)(c-8)=0$$

$c>0$ より，$\boldsymbol{c=8}$



[B]　A がわかるので，A を含む余弦定理の式を使う。
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

第13講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

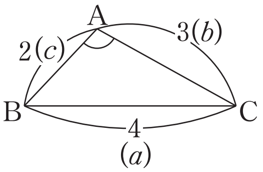
[解説]

$$b^2+c^2=3^2+2^2=13$$

$$a^2=4^2=16$$

であるから，$b^2+c^2<a^2$

よって，A は**鈍角**である。[A]



> **[A]　三角形の辺と角の関係**
> △ABC において，
> A が鋭角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2>a^2$
> A が直角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2=a^2$
> A が鈍角 $\Longleftrightarrow b^2+c^2<a^2$

2

[正解] イ：6，ウエ：45，オカ：75

[解説]

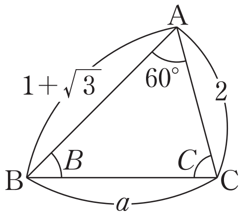
余弦定理より，

$$a^2=2^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot2\cdot(1+\sqrt{3})\cos60^\circ \quad \text{[B]}$$

$$=4+(4+2\sqrt{3})-2(1+\sqrt{3})$$

$$=6$$

$a>0$ より，$\boldsymbol{a=\sqrt{6}}$



余弦定理より，

$$\cos B=\frac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{6}} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{(4+2\sqrt{3})+6-4}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+6}{2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$$

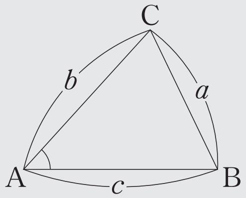
$$=\frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\boldsymbol{B=45^\circ}$

したがって，$C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=\boldsymbol{75^\circ}$

> **[B]　余弦定理**
> △ABC において，
> $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$



> **[C]　余弦定理**
> △ABC において，
> $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
> $\Longleftrightarrow\quad \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

第14講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3

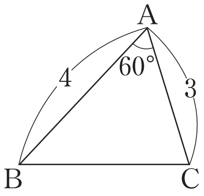
[解説]

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3\sqrt{3}}$$

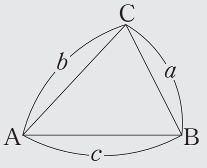


[A]　△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$



2

[正解] ウ：6

[解説]

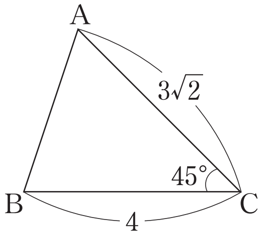
$$S=\frac{1}{2}ab\sin C \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\sqrt{2}\sin45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{6}$$

[B]　2辺とその間の角が与えられた場合，公式で面積を求められる。

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$



3

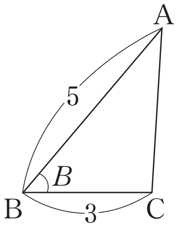
[正解] エ：5

[解説]

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\mathbf{5}$$

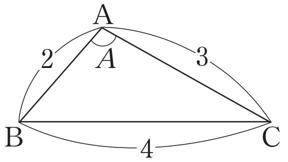


[C]　2辺とその間の角（またはその間の角の正弦の値）が与えられた場合，公式で面積を求められる。

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B$$

4 **[正解] オ：1，カ：4，キク：15，ケ：4，コ：3，サシ：15，ス：4**

[解説]



余弦定理より，[D] [E]

$$\cos A=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}$$

$$=\frac{9+4-16}{2\cdot3\cdot2}$$

$$=-\frac{3}{2\cdot3\cdot2}=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A$$ [F]

$$=1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

$\sin A>0$ より，$\sin A=\sqrt{\frac{15}{16}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$

よって，面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{15}}{4}}$$

[D]　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\Longleftrightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

[E]　3 辺の長さが与えられた場合の面積を求める手順

①余弦定理より $\cos A$ の値を求める。

②$\cos A$ から角度 A を求め，$\sin A$ の値を求める，または，三角比の相互関係より，$\sin A$ の値を求める。

③公式を用いて面積を求める。

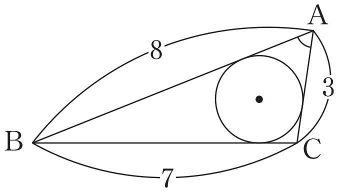
[F]　三角比の相互関係

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

第14講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウエ：60，オ：6，カ：3，
キ：2，ク：3，ケ：3

[解説]



余弦定理より，[A]

$$\cos A=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}$$

$$=\frac{9+64-49}{2\cdot3\cdot8}$$

$$=\frac{24}{2\cdot3\cdot8}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

よって，$\boldsymbol{A=60^\circ}$

△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin60^\circ \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より，[C]

$$6\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(7+3+8)$$

$$9r=6\sqrt{3}$$

$$\boldsymbol{r=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

[A]　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

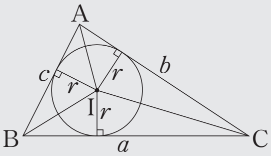
$\Longleftrightarrow\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

[B]　△ABC の面積を S とすると，

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

[C]　三角形の内接円と面積
△ABC の面積を S，内接円の半径を r とすると，

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$



第14講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウエ：45，オカ：30，キ：9，ク：2

[解説]

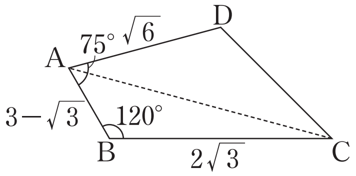
△ABC で余弦定理より，[A]

$AC^2=(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cos 120^\circ$

$=12-6\sqrt{3}+12-4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=18$

AC＞0 より，

$AC=\mathbf{3\sqrt{2}}$



△ABC で正弦定理より，[B]

$\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\angle BAC}$

$\sin\angle BAC=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 120^\circ}{3\sqrt{2}}$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

∠BAC＜75° より，

$\angle BAC=\mathbf{45^\circ}$

よって，$\angle DAC=75^\circ-45^\circ=\mathbf{30^\circ}$

したがって，

$S=\triangle ABC+\triangle DAC$ [C]

$=\frac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\sin 120^\circ$

$+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{2}\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\mathbf{\frac{9}{2}}$

[A]　△ABC に着目して，余弦定理を利用して AC の長さを求める。

[B]　△ABC は 2 辺がわかっているので，正弦定理を利用する。

[C]　2 つの三角形の和として四角形の面積を求める。

第14講 PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：6，ウエ：11，オ：2

[解説]

△ABC，△ABF，△BCF のそれぞれにおいて，

三平方の定理より，

$$AC=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$ [A]

$$AF=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$$

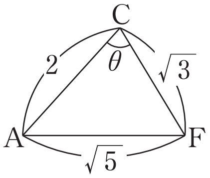
$$CF=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$$

△AFC で余弦定理より，[B]

$$\cos\theta=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4+3-5}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$



$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{33}{36}$$

$\sin\theta>0$ より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{33}{36}}=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$

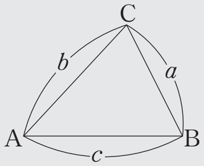
よって，△AFC の面積は，[C]

$$\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{33}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$$

[A]　△AFC の 3 辺の長さを求める。

[B]
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$\Longleftrightarrow\quad \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

[C]　△ABC の面積を S とすると，
$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$



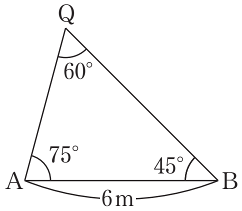
2 **[正解]** カ：6，キ：2

[解説]

△QAB において，

$$\angle \mathrm{AQB} = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

正弦定理より，[D]



$$\frac{\mathrm{AQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}$$

$$\mathrm{AQ} = \frac{6}{\sin 60^\circ} \times \sin 45^\circ$$

$$= 6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{6}$$

よって，直角三角形 PAQ において，

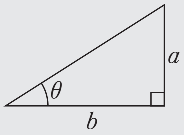
$$\mathrm{PQ} = \mathrm{AQ}\tan 60^\circ \quad \text{[E]}$$

$$= 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \mathbf{6\sqrt{2}}$$

[D]　正弦定理
△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

[E]　直角三角形において，
$a = b\tan\theta$



第15講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：6

[解説]

平均値は，[A]

$$\frac{1+2+4+5+5+8+10+13}{8}$$

$$=\frac{48}{8}=6$$

[A]　平均値
$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

2　**[正解]** イ：8，ウ：9

[解説]

(A)　データが7個だから，値の小さい方から4番目にくる値が中央値になる。[B]

中央値は，8

(B)　データが8個だから，小さい方から4番目と5番目にくる値の平均が中央値となる。[C]

中央値は，$\frac{7+11}{2}=9$

[B]　中央値…大きさの順に並べたとき中央にくる値

[C]　データの個数が偶数のときは，中央の2つの値の平均値が中央値となる。

3　**[正解]** エ：5，オ：7

[解説]

中央値は，値の小さい方から13番目にくる値である。[D]

これが含まれる階級は**5以上7未満**。

[D]　25個の中央にくる値は，小さい方から13番目である。

4　**[正解]** カ：8

[解説]

個数が最も多い階級は7以上9未満である。

最頻値は，この階級の階級値だから，[E]

$$\frac{7+9}{2}=8$$

[E]　度数分布表から最頻値を求めるときは，度数が最も大きい階級の階級値を求める。

第 15 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5，ウ：6

[解説]

2，2，[4]，5，5，5，6，[6]，6，7　[A]

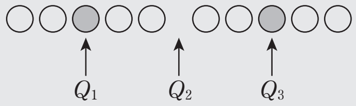
第 1 四分位数　第 2 四分位数　第 3 四分位数

第 1 四分位数…$Q_1 = 4$

第 2 四分位数…$Q_2 = 5$

第 3 四分位数…$Q_3 = 6$

> [A]　第 1 四分位数…Q_1
> 　　第 2 四分位数…Q_2（中央値）
> 　　第 3 四分位数…Q_3



2

[正解] エ：3，オ：4，カ：7

[解説]

1，1，[3]，3，3，5，6，[7]，7，9

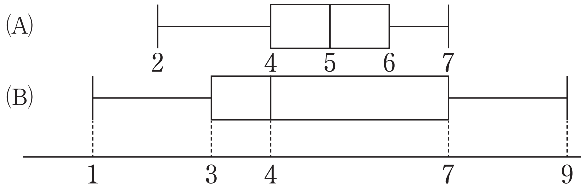
第 1 四分位数　第 2 四分位数　第 3 四分位数

第 1 四分位数…$Q_1 = 3$

第 2 四分位数…$Q_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$

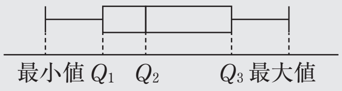
第 3 四分位数…$Q_3 = 7$

よって，箱ひげ図は，次のようになる。



[B]

> [B]　箱ひげ図



3

[正解] キ：8，ク：4

[解説]

最大値は 9，最小値は 1 であるから，

データの範囲は，$9-1=8$　[C]

第 1 四分位数は 3，第 3 四分位数は 7 であるから

四分位範囲は $Q_3 - Q_1 = 7-3 = 4$

> [C]　範囲 ＝（最大値）－（最小値）
> 　　四分位範囲…$Q_3 - Q_1$

4 [正解] ケ：②

[解説]

(A)のデータの範囲は，$7-2=5$ [D]

(B)のデータの範囲は，$9-1=8$

(A)のデータの四分位範囲は，$6-4=2$

(B)のデータの四分位範囲は，$7-3=4$

範囲，四分位範囲ともに(B)のデータの方が大きいので，**(B)のデータの方が散らばりの度合いが大きい**といえる。

[D]　範囲の大きさや四分位範囲の大きさから，複数のデータの散らばり度合いを比較することができる。

第15講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]

平均値 $\overline{x}$ は，[A]

$$\overline{x}=\frac{1}{8}(1+2+2+3+4+6+7+7)$$

$$=\frac{1}{8}\times 32=\mathbf{4}$$

[A]　平均値

$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

2

[正解] イ：5

[解説]

データの各値を x とすると，平均値 $\overline{x}=4$ であり，

$x-\overline{x}$ と $(x-\overline{x})^2$ の値を求めると，次のようになる。

x	1	2	2	3	4	6	7	7
$x-\overline{x}$	-3	-2	-2	-1	0	2	3	3
$(x-\overline{x})^2$	9	4	4	1	0	4	9	9

よって，分散 s^2 は，[B]

$$s^2=\frac{1}{8}(9+4+4+1+0+4+9+9)$$

$$=\frac{1}{8}\times 40=\mathbf{5}$$

[B]　分散

s^2

$=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$

$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$

(x^2 の平均値)$-$(x の平均値)^2

と計算することもできる。

3

[正解] ウ：5

[解説]

分散 s^2 が 5 であるから，標準偏差は，[C]

$$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\mathbf{5}}$$

[C]　標準偏差 $s\cdots\sqrt{(\text{分散})}$

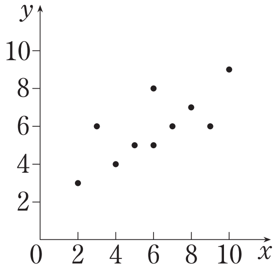
第15講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：①

[解説]

散布図は次の図のようになる。



[A]

正しい散布図は，①

散布図から，x と y には

正の相関があるといえる。 [B]

[A]　x と y の値の組を座標 $(x,\ y)$ としてとっていく。

[B]　散布図における点の分布が
右上がりの直線に近い
→　正の相関がある
右下がりの直線に近い
→　負の相関がある

2

[正解] ウ：④

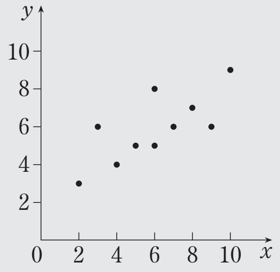
[解説]

x と y には強い正の相関が見られるので，相関係数の値は 0 よりも 1 に近い。 [C]

最も近い値は **0.7** である。

(参考)実際に相関係数を計算すると，およそ 0.74 となる。

[C]　相関係数 r について，
強い正の相関がある
→　r は 1 に近い
強い負の相関がある
→　r は -1 に近い



第15講　PART5 確認問題 解答

1

[正解] アイ：11，ウ：4，エ：9，オカ：12

[解説]

平均値は，

$$\frac{1}{10}(3+4+4+7+8+10+10+12+23+29)$$

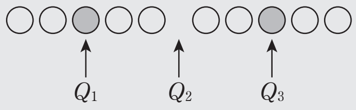
$$=\frac{110}{10}=\mathbf{11}\ (\text{冊})$$

第 1 四分位数は，**4 冊**

第 2 四分位数は，$\dfrac{8+10}{2}=\mathbf{9}$ **冊**

第 3 四分位数は，**12 冊**

[A]
第 1 四分位数…Q_1
第 3 四分位数…Q_3



2

[正解] キ：②，ク：9

[解説]

$Q_1-1.5(Q_3-Q_1)=4-1.5\times(12-4)=-8$ [B]

$Q_3+1.5(Q_3-Q_1)=12+1.5\times(12-4)=24$

よって，外れ値は -8 以下の値または 24 以上の値である。

したがって，外れ値は，**29**

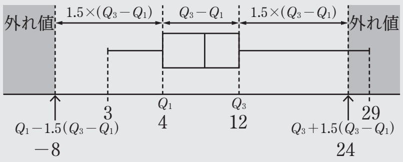
値 29 を除いた 9 個のデータ

3，4，4，7，8，10，10，12，23

の平均値は，

$$\frac{110-29}{9}=\frac{81}{9}=\mathbf{9}\ (\text{冊})$$

[B]
外れ値の境目になる数値を求める。



第15講　PART6 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②

[解説]

仮説①「給食は以前よりおいしくなった。」

仮説②「給食は以前と変わらない。」[A]

表より，表が 20 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{12+7+5+3+1+1}{500}=0.058$$ [B]

であり，確率は0.058と考えられ，基準となる確率0.05より大きい。したがって，仮説②が誤りとは言えない(正しいとも言えない)。

したがって，仮説①は正しいとは言えない。

ゆえに，**給食はおいしくなったとは判断できない。**

[A]
仮説①　主張したい仮説を立てる
仮説②　①に反する仮説を立てる

[B]　②で立てた仮説が正しいかどうかを，確率を計算し，基準となる確率より大きいか小さいかで判断する。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。